

Р. С. ИНГАРДЕН

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ В ПЯТИМЕРНОЙ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(Представлено академиком В. А. Фоком 20 XII 1952)

В общей теории относительности существуют два разных метода вывода уравнений движения из уравнений поля: метод Эйнштейна и Инфельда (<sup>1</sup>, <sup>2</sup>), с одной стороны, и метод Фока (<sup>3</sup>, <sup>4</sup>), с другой. Разница этих методов связана с существованием некоторых различий во взглядах этих авторов на сущность общей теории относительности. Первые авторы считают, что «всякие попытки представления вещества посредством тензора энергии-импульса являются неудовлетворительными» (<sup>2</sup>). Поэтому они занимаются исключительно уравнениями поля в пустом пространстве, вещество же представляется как особенности поля, которые должны иметь какую-то связь с элементарными частицами микрофизики. В. А. Фок считает, наоборот, что общая теория относительности является только теорией гравитации, применимой исключительно к явлениям астрономического масштаба, и не имеет ничего общего с микрофизикой, в которой поле тяготения существенной роли не играет. Соответственно этому Фок составляет теорию «конечных масс» и вводит в уравнения поля тензор энергии-импульса.

В настоящей работе мы постараемся показать, что эти два взгляда можно в некоторой степени согласовать в 5-мерной, «единой» теории относительности. При этом получится новая точка зрения на всю проблему.

Рассмотрим 5-мерную геометрию Римана с мероопределением  $d\tau^2 = -g_{\mu\nu}(x^\rho) dx^\mu dx^\nu$  с сигнатурой (+, —, —, —, —). Эта сигнатура единственно возможна, если метрическая форма должна быть индефинитной и вариационная задача

$$\delta \int d\tau = 0$$

регулярной (<sup>5</sup>). Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, 4; латинские — значения 0, 1, 2, 3.

Для того чтобы координаты  $x^\mu$  и компоненты тензора  $g_{\mu\nu}$  получили физическое значение, введем «инерционную» систему координат в смысле Фока (<sup>3</sup>, <sup>4</sup>), т. е. такую, что:

1°. Координаты являются гармоническими (независимыми частными решениями 5-мерного уравнения Даламбера). Условие это равносильно координатным условиям

$$g_{,\mu}^{\mu\nu} = 0, \quad (1)$$

где  $g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$ ,  $g = \det g_{\mu\nu}$  и индекс после запятой обозначает обыкновенное дифференцирование.

2°. Координатная система является «надлежащей пространственно-временной системой» в значении Гильберта (6) (см. также (7), стр. 270, сноска 1), что соответствует ковариантному разделению «времени»  $x_0$  от «пространства»  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  \*.

3°. На пространственной бесконечности ( $r = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + c^2(x^4)^2]^{1/2} \rightarrow \infty$ , где  $c$  — скорость света в пустоте) для всякого  $x^0$ :

$$а) (d\tau^2)_\infty = c^2(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - c^2(dx^4)^2 \equiv -\epsilon_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2)$$

При этом функции  $h_{\mu\nu} = -\epsilon_{\mu\nu} g_{\mu\nu}$  должны стремиться к нулю при  $r \rightarrow \infty$  таким образом, чтобы произведения  $rh_{\mu\nu}$  оставались конечными; б) имеет место условие излучения Зоммерфельда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^0} \right) (rh_{\mu\nu}) = 0.$$

Условия 1° — 3° определяют координатную систему с точностью до 5-мерного преобразования Лоренца с постоянными коэффициентами, сохраняющего на бесконечности форму (2) (4). Таким образом, задача «общей» теории относительности сведена Фоком в некотором смысле к задаче «частной» теории относительности (4, 8), однако в другом значении, чем попытка Розена (9), которая кажется нам ошибочной. Открытие Фока имеет очень важное принципиальное значение и особо существенно для задачи определения понятия момента импульса (10) и проблемы квантования поля (11) в общей теории относительности.

Координате  $x^4$  мы даем физическую интерпретацию «собственного времени», координатам  $x^1, x^2, x^3$  — интерпретацию «собственных пространственных координат». Эти понятия можно, как будет видно ниже, точно отождествить с соответственными понятиями (частной) теории относительности в 4 измерениях (с той лишь разницей, что в 4-мерной теории не употребляется прилагательного «собственный» относительно пространственных координат). Величинам  $h_{\mu\nu}$  даем интерпретацию потенциалов «единого поля». Потенциалы эти можно подразделить соответственно различию координат на: потенциалы гравитационного поля  $h_{ij}$  и потенциалы «мезо-электромагнитного» поля  $h_{4i} = h_i, h_{44} = 2h_4$ .

Независимо от специальных интерпретаций координат и метрического тензора, принимаем в качестве основания теории вариационный принцип, инвариантный относительно общих преобразований координат (7)

$$\delta(S_u + S_m) = 0, \quad (3)$$

где  $S_u = \frac{c^2}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d^5x$  — «5-действие» единого поля,  $S_m = \frac{1}{c^2} \int L \sqrt{-g} d^5x$  — «5-действие» источников единого поля («вещества»),  $d^5x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$ ,  $k$  — гравитационная постоянная,  $G = G(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu, \rho})$  — лагранжева плотность поля,  $L = L(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu, \rho}; q_A, q_{A, \mu})$  — лагранжева плотность вещества,  $q_A = q_A(x^\mu)$  ( $A = 1, 2, \dots, s$ ) — «динамические величины», определяющие вещество.

Покажем, что в 5-мерной теории относительности можно определить лагранжеву плотность вещества, таким образом, чтобы уравнения движения следовали из уравнений поля без добавочных предположений относительно вещества вроде уравнения состояния. Иначе говоря, дело состоит в том, чтобы в конечном счете динамическими величинами теории остались только «геометрические» величины  $g_{\mu\nu}$ , или чтобы в (3) только по этим величинам следовало брать вариацию. Таким обра-

\* Условие 2° добавлено нами.

зом, мы хотим, чтобы утверждение, что уравнения движения следуют из уравнений поля, было постулатом, а не следствием теории (этот постулат можно было бы назвать постулатом геометризации). Уравнения движения не следовали бы из уравнений поля, если бы лагранжева плотность вещества зависела от большего числа динамических переменных  $q_A$ , чем число произвольных функций при преобразованиях координат ( $s > 5$ ). В самом деле, уравнения движения можно было бы тогда получить, только варьируя в (3) относительно  $q_A$  ( $s$  уравнений для  $s$  функций  $q_A$ ). В этом случае уравнения движения не имели бы никакой связи с уравнениями поля, являющимися следствием варьирования в (3) по  $g_{\mu\nu}$ . С другой стороны, известная теорема Э. Нётер (<sup>12, 6</sup>) гласит, что между уравнениями Эйлера — Лагранжа инвариантной вариационной задачи существует столько дифференциальных тождеств, сколько имеется произвольных функций в преобразовании координат, — в нашем случае 5. Так как  $L$  зависит, вообще говоря, от  $g_{\mu\nu}$  и  $g_{\mu\nu, \rho}$  (это следует из инвариантности  $S_m$ ), мы можем определить тензор энергии-импульса вещества обыкновенной формулой (<sup>7</sup>)

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} \equiv \frac{-2}{V-g} \left\{ \frac{\partial \sqrt{V-g} L}{\partial g^{\mu\nu}} - \left( \frac{\partial \sqrt{V-g} L}{\partial g^{\mu\nu, \rho}} \right)_{, \rho} \right\}.$$

Конструируя  $G$ , как всегда, из тензора Риччи  $R_{\mu\nu}$  (<sup>7</sup>), мы получим эйнштейновы уравнения поля

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{18\pi k}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4)$$

( $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ), из которых вытекает, в качестве тождеств Э. Нётер, 5 уравнений

$$T^{\mu}_{; \mu} = 0 \quad (5)$$

(индекс после точки с запятой обозначает ковариантное дифференцирование). Если  $s = 5$ , то уравнения (5) (вместе с граничными условиями и с уравнениями (1) и (4), определяющими  $g_{\mu\nu}$ ) будут достаточны, вообще говоря, для определения  $q_A$ . Поэтому (5) будут тогда представлять собою уравнения движения вещества, следующие из уравнений поля (4).

В общей теории относительности обычно употребляется тензор энергии-импульса вещества в виде (<sup>7</sup>)

$$T_{\mu\nu} = (p + \varepsilon) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu\nu} \quad (6)$$

( $p$  — давление,  $\varepsilon$  — плотность,  $u_{\mu}$  — скорость вещества), причем

$$u_{\mu} u^{\mu} = -1. \quad (7)$$

Тензор (6) содержит одну лишнюю функцию ( $s = 6$ , принимая во внимание (7)). В этом заключается источник существенных трудностей, непреодолимых в 4 измерениях, так как в общем случае нельзя отказаться от какой-либо из этих функций. Это препятствие и заставило Эйнштейна и Инфельда вообще отступить от тензора энергии-импульса, а Фока привело к ограничению области применения этого тензора к микрофизике, где можно предположить существование термодинамического уравнения состояния, связывающего  $p$  с  $\varepsilon$ , разного в разных случаях. В 5-мерном мире можно, однако, принять, не входя в противоречие с опытом, следующее универсальное соотношение, которое кажется нам наиболее простым и наиболее естественным:

$$T^{\mu}_{; \mu} = 0. \quad (8)$$

Отсюда и из (6) получаем уравнение  $\varepsilon = 4p$ , которое в 4-мерной теории соответствует «уравнению состояния» излучения:  $\varepsilon = 3p$  (7). Тензор энергии-импульса принимает форму

$$T_{\mu\nu} = p(5u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}). \quad (9)$$

В (9) мы имеем 6 функций типа  $q_A: p(x^0)$  и  $u_\mu(x^0)$ , из которых на основании (7) 5 независимых ( $s=5$ , как и должно быть).

Из условия (8) и (4) следует исчезновение скалярной кривизны:  $R=0$ , или то же самое свойство, которое существует в теории Эйнштейна и Инфельда (где  $T_{\mu\nu}=0$ ). Наши уравнения поля получают вид

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi k}{c^4} p(g_{\mu\nu} + 5u_\mu u_\nu). \quad (10)$$

Поля типа (10) представляют естественное, кажется, обобщение полей  $R_{\mu\nu}=0$ , другое, чем обобщение Эйнштейна—де-Ситтера  $R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$  ( $\lambda$  — «космическая постоянная»), недавно исчерпывающе исследованное А. З. Петровым (13).

С другой стороны, из (9) следует, что «вещественное поле»  $p$ ,  $u_\mu$  не имеет «массы покоя» в 5-мерном значении и распространяется по 5-мерному «световому конусу»  $dx^2 = 0$ . Поэтому «частицы» этого поля (в классическом смысле — как большие сгущения или особенности поля, или же в квантовом смысле) должны быть «5-мерными фотонами». В частности, в плоском пространстве имеем

$$c^2(dx^4)^2 = c^2(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2,$$

что и обосновывает наше толкование  $x^4$  как «собственного времени» в смысле 4-мерной теории относительности. Наша интерпретация 5-й координаты пространства отличается от интерпретации В. А. Фока (14) и Ю. Б. Румера (15), но приводит к многократно выдвигаемой идее толкования движения материальных частиц как движения «фотонов» в 5-мерном мире (16–18). Однако, насколько нам известно, все существующие до сих пор работы на эту тему основываются на предпосылках теории Калюцы (19) и Клейна (20), которые несколько уже наших предпосылок.

Доказательство того, что на указанных классических основаниях можно построить квантовую теорию элементарных частиц, мы дадим отдельно.

Автор считает своим долгом принести искреннюю благодарность акад. В. А. Фоку за ценные замечания, высказанные во время конференции польских физиков в Спале, которые в значительной мере способствовали улучшению настоящей работы.

Вроцлавский университет им. Б. Берута  
Вроцлав, Польша

Поступило  
6 VIII 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman, Ann. of Math., 39, 66 (1938).  
<sup>2</sup> A. Einstein, L. Infeld, Can. J. of Math., 1, 209 (1949). <sup>3</sup> В. А. Фок, ЖЭТФ, 9, 375 (1939); J. of Phys., 1, 81 (1939). <sup>4</sup> В. А. Фок, Сборн., посвящ. 70-летию акад. А. Ф. Иоффе, 1950, стр. 31. <sup>5</sup> С. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, 1935, § 311. <sup>6</sup> D. Hilbert, Math. Ann., 92, 1 (1924). <sup>7</sup> Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, 2-е изд., 1948. <sup>8</sup> В. А. Фок, Сборн. статей к 400-летию со дня смерти Н. Коперника, 1947, стр. 180. <sup>9</sup> N. Rosen, Phys. Rev., 57, 147 (1940). <sup>10</sup> A. Papapetrou, Proc. Roy. Irish Acad., 52A, 11 (1948). <sup>11</sup> S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc., 65 A, 608 (1952). <sup>12</sup> E. Noether, Gött. Nachr., 235 (1918). <sup>13</sup> А. З. Петров, Сборн. статей к 125-летию геометрии Лобачевского, 1952, стр. 179. <sup>14</sup> В. А. Фок, Z. f. Phys., 39, 226 (1926). <sup>15</sup> Ю. Б. Румер, ЖЭТФ, 19, 86 (1949). <sup>16</sup> P. Ehrenfest, G. E. Uhlenbeck, Z. f. Phys., 39, 495 (1926). <sup>17</sup> J. W. Fisher, Proc. Roy. Soc., 123 A, 489 (1929). <sup>18</sup> H. C. Corben, Phys. Rev., 70, 947 (1946). <sup>19</sup> Th. Kaluza, Berl. Ber., 966 (1921). <sup>20</sup> O. Klein, Z. f. Phys., 37, 895 (1926).