Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 5

ГИДРАВЛИКА

И. А. ЧАРНЫЙ

БЕЗНАПОРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ВДОЛЬ ВЕРТИКАЛИ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 3 XII 1952)

1. Обобщение формулы Дюпюи. Рассмотрим установившийся безнапорный грунтовый поток несжимаемой жидкости при горизонтальном водоупоре (см. рис. 1), когда коэффициент фильтрации k является функцией высоты z, $k = k(z)$.

Расход Q на единицу ширины потока при глубине h определяется уравнением

$$Q = -\int_0^h k(z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)dz = -\int_0^h k(z)\frac{\partial H}{\partial x}dz, \tag{1,1}$$

где p — избыточное давление, отсчитываемое от давления на свободной поверхности, γ — объемный вес, $H = \frac{p}{\gamma}+z$ — напор. Пользуясь формулой дифференцирования определенного интеграла по параметру, уравнение (1,1) можно представить, учитывая, что при $z = h$ $p = 0$, в таком виде:

$$Q = -\left[\frac{d}{dx}\int_0^h k(z)\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)dz - k(h)h\frac{dh}{dx}\right] =$$

$$= -\left[\frac{d}{dx}\int_0^h k(z)\frac{p}{\gamma}dz + \frac{d}{dx}\int_0^h k(z)z\,dz - k(h)h\frac{dh}{dx}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^h k(z)p\,dz, \tag{1,2}$$

откуда

$$Q = \frac{1}{\gamma l}\left[\left(\int_0^h k(z)p\,dz\right)_{x=0} - \left(\int_0^h k(z)p\,dz\right)_{x=l}\right]. \tag{1,3}$$

В сечениях $x = 0$ и $x = l$ распределение давления должно быть, естественно, известным. При гидростатическом распределении давления на границах

$$p_{x=0} = \gamma(H_1 - z), \quad p_{x=l} = \gamma(H_2 - z)$$

формула (1,3) принимает вид

$$Q = \frac{1}{l}\left[H_1\int_0^{H_1} k(z)dz - H_2\int_0^{H_2} k(z)dz - \int_{H_2}^{H_1} k(z)z\,dz\right], \tag{1,4}$$

что является обобщением формулы Дюпюи на случай грунта с переменной по вертикали проницаемостью. Строгое доказательство формулы Дюпюи для грунта с постоянной проницаемостью, полученное несколько другим путем, было дано в ([1]).

Уравнение (1,4) совпадает с формулой Н. К. Гиринского ([2]), рассматривавшего фильтрацию в неоднородных грунтах при обычных допущениях гидравлической теории безнапорного движения, предполагая горизонтальную компоненту скорости и напор вдоль вертикали постоянными и пренебрегая вертикальными компонентами скорости. Поэтому формула (1,4) считалась приближенной. Между тем, как следует из вышеизложенного, она является строго точной.

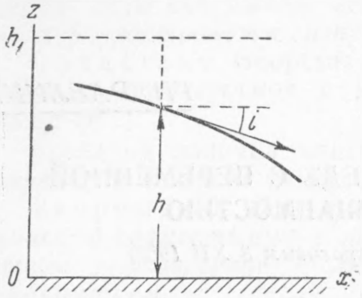

Рис. 1

2. Сведение безнапорного течения к эквивалентному напорному. Проведем выше свободной поверхности горизонтальную плоскость на произвольном расстоянии h_1 от водоупора (рис. 1) и рассмотрим фиктивное напорное течение в слое мощностью h_1 при следующем распределении напора вдоль вертикали: в интервале $0<z<h$ давление распределено так, как в действительном безнапорном течении, а в интервале $h<z<h_1$ давление равно нулю и, следовательно, напор $H=z$. Такая экстраполяция потенциала за пределы действительного движения применялась Маскетом ([3]), который считал, что расход при напорном движении будет несколько больше, чем в действительном безнапорном.

На самом же деле расход Q_1 фиктивного напорного потока в точности равен расходу Q безнапорного.

Действительно,

$$Q_1 = -\int_0^{h_1} k(z)\frac{\partial H}{\partial x}dz = -\left[\int_0^h k(z)\frac{\partial H}{\partial x}dz + \int_h^{h_1} k(z)\frac{\partial z}{\partial x}dz\right] = Q, \qquad (2,1)$$

так как второй интеграл равен нулю.

Введем функцию $\Phi(x, y)$:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{h_1}\int_0^{h_1} k(z) H(x, y, z)\,dz, \qquad (2,2)$$

где напор H определен условием

$$0<z<h, \quad H(x, y, z) = \frac{1}{\gamma}p(x, y, z) + z; \quad h<z<h_1, \ H=z. \qquad (2,3)$$

Расходы Q_x, Q_y фиктивного напорного движения совпадают с расходами действительного безнапорного и связаны с $\Phi(x, y)$ соотношениями

$$\frac{Q_x}{h_1} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}; \quad \frac{Q_y}{h_1} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad (2,4)$$

из которых следует, что при установившемся движении $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа на плоскости $\nabla^2\Phi = 0$.

Рассмотрим далее вертикальную компоненту w скорости поверхностной струйки безнапорного потока

$$w = k\frac{\partial h}{\partial s}\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right| = -k\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} + 1\right)_{z=h}, \qquad (2,5)$$

ds — элемент длины струйки. Отсюда

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=h} = -\gamma\left(1 + \frac{\partial h}{\partial s}\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|\right). \tag{2,6}$$

На водоупоре

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} = -\gamma. \tag{2,7}$$

Если в сечении безнапорного потока кривизна линий тока меньше кривизны поверхностной струйки, квадратом уклона которой $\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей, то можно принять $\left|\frac{\partial p}{\partial z}\right| = \gamma$ во всех точках сечения, что соответствует постоянному напору h.

Тогда, согласно (2,2),

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{h_1}\left[\int_0^h k(z)\, h\, dz + \int_h^{h_1} k(z)\, z\, dz\right] = \frac{1}{h_1}\left[h\int_0^h k(z)\, dz + \int_h^{h_1} k(z)\, z\, dz\right]. \tag{2,8}$$

Зная распределение $\Phi(x, y)$ из решения задачи о фиктивном напорном течении, из формулы (2,8) нетрудно найти глубину безнапорного потока.

При постоянной проницаемости $\Phi = k\overline{H}$, где $\overline{H} = \frac{1}{h_1}\int_0^{h_1} H(x, y, z)\, dz$ есть средний напор вдоль вертикали. Из (2,8) получаем при $k(z) = k = \text{const}$:

$$\overline{H} = \frac{1}{h_1}\left[h^2 - \frac{1}{2}(h_1^2 - h^2)\right],$$

откуда

$$h = \sqrt{h_1^2 - 2h_1\overline{H}}. \tag{2,9}$$

Таким образом, все известные решения задачи напорной фильтрации, в том числе и для случаев притока к скважинам, с помощью функции (2,2) могут быть использованы для решения аналогичных

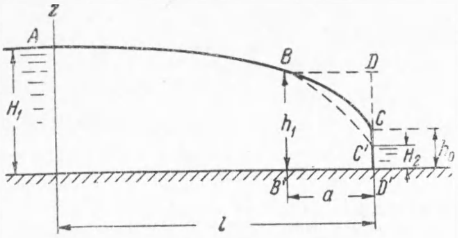

Рис. 2

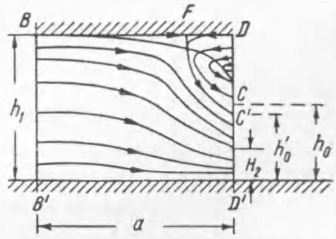

Рис. 3

задач безнапорного движения. Расходы в обоих движениях при этом будут одинаковы.

Формулы (2,8) и (2,9) непригодны вблизи промежутков высачивания, где уклон свободной поверхности велик. В этом случае можно воспользоваться следующим обобщением способа, предложенного в работе ([4]).

По формулам (2,8) или (2,9) строится поверхность депрессии во всей области вплоть до границ (кривая ABC' рис. 2). Вне пределов участка $a \geqslant h_1$ уклоны очень малы, напоры вдоль вертикалей могут считаться постоянными и истинная поверхность депрессии совпадает с построенной (участок AB рис. 2). Определив аналитически или графически величину $a = h_1$, следует решить уравнение Лапласа $\nabla^2 H = 0$ для напорного движения в области $BDB'D'$ при граничных условиях (2,3) для напора H и дополнительных условиях $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ на границах $z = 0$, $z = h_1$.

При этом действительное безнапорное движение с поверхностью депрессии будет заменено напорным с картиной линий тока, схематически показанной на рис. 3.

Положение верхней точки промежутка высачивания может быть приближенно найдено, как в ([4]), из условия $\int\limits_{h_0}^{h_1} \frac{\partial H}{\partial x} dz = 0$, соответствующего равенству нуля расхода на отрезке DC' выходной грани при напорном движении. При этом, так как расход для напорного и безнапорного движений одинаков и так как $a \leqslant h_1$, истинная ордината h_0 верхней точки промежутка высачивания будет мало отличаться от h_0'.

Поступило
26 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Чарный, ДАН, 79, № 6 (1951). [2] Н. К. Гиринский, Сборн. Гидрогеология и инженерная геология, № 9, 1947. [3] М. Маскет, Движение однородной жидкости в пористой среде, пер. с англ., 1949. [4] И. А. Чарный, ДАН, 80, № 1 (1951).