Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. СМИРНОВ

О ПОЛНОТЕ ПРОСТРАНСТВ БЛИЗОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 XII 1952)

По аналогии с метрическими пространствами и топологическими группами ([1, 2]) кажется естественным определить полные δ-пространства * как δ-пространства, замкнутые во всяком объемлющем δ-пространстве. Однако это понятие «полноты», называемое абсолютной замкнутостью, оказалось ([3, 4]) совпадающим с бикомпактностью и, следовательно (как показывает уже пример числовой прямой), дает и в случае метрических пространств и в случае групп, рассматриваемых как δ-пространства, не то, что нужно. В ([3]) была сделана попытка «настоящего» определения полноты δ-пространств, которая здесь развивается в последовательную теорию.

Пусть нам дано δ-пространство P. Назовем систему ξ множеств δ-пространства P *c*-системой, если для любого равномерного δ-покрытия ([3]) γ-пространства P существует множество $X \in \xi$, содержащееся в некотором $\Gamma \in \gamma$. Назовем δ-систему ([3]) ξ множеств δ-пространства P $c\delta$-системой, если ξ является в то же время и c-системой. Максимальные центрированные $c\delta$-системы мы будем называть c-концами.

Легко видеть, что c-концы суть те δ-концы, которые являются c-системами. Отсюда следует, что *для всякого δ-пространства P множество cP всех его c-концов содержится в бикомпактном δ-расширении* ([3]) *uP пространства P*. Таким образом, *множество cP*, являясь подмножеством δ-пространства uP, само *оказывается δ-пространством*. Еще легче видеть, что каждый δ-конец ξ_x пространства P, состоящий из всех δ-окрестностей точки $x \in P$, является c-системой. Значит, *δ-гомеоморфное* ([3]) *отображение ξ пространства P в uP*, ставящее в соответствие каждой точки x δ-конец ξ_x, *отображает пространство P в cP*. Следовательно, *δ-пространство cP является δ-расширением пространства P*: $P \subset cP \subseteq uP$.

Это определенное единственным образом для каждого δ-пространства P его δ-расширение cP мы называем пополнением δ-пространства P; δ-пространство P мы называем полным, если оно совпадает со своим пополнением. Примерами полных δ-пространств могут служить бикомпактные δ-пространства, а также, как мы увидим впоследствии, полные метрические пространства и полные топологические группы.

Так как всякое δ-расширение данного δ-пространства P содержится в uP, то множество всех δ-расширений каждого δ-пространства P оказывается частично упорядоченным (по включению) множеством. Для каждой системы γ множеств δ-пространства P положим $P_\gamma = \bigcup_{\Gamma \in \gamma} O^P_{uP} \langle \Gamma \rangle$.

Теорема 1. *Для любого δ-пространства P пополнение*

$$cP = \bigcap_{\gamma} P_\gamma,$$

где γ пробегает множество всех равномерных δ-покрытий P.

* Так мы для краткости называем пространства близости.

Следствие. *Пополнение δ-пространства P есть наибольшее из всех его δ-расширений, на каждое из которых любое открытое равномерное δ-покрытие δ-пространства P можно продолжить* * *в открытое покрытие* **.

Теорема 2. *Пополнение δ-пространства P есть наибольшее из всех его δ-расширений, на каждое из которых любое равномерное δ-покрытие δ-пространства P можно продолжить в равномерное δ-покрытие.*

Эта теорема доказывается при помощи предложения:

Для любого равномерного δ-покрытия γ δ-пространства P покрытие $O\gamma$, состоящее из множеств $cP \cap O^{P}_{uP}\langle\Gamma\rangle$, $\Gamma \in \gamma$, является равномерным δ-покрытием пополнения cP.

Следствие. *Пополнение всякого δ-пространства P полно.*

Теорема 3. *Для того чтобы δ-пространство P было полно, необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная $c\delta$-система имела непустое пересечение.*

Теорема 3'. *Для того чтобы δ-пространство P было полно, необходимо и достаточно, чтобы всякая замкнутая* *** *центрированная c-система имела непустое пересечение.*

Теорема 4. *Пополнение любого δ-пространства P есть наименьшее из всех его полных δ-расширений.*

Теорема 5. *δ-пространство $\tilde{P}$, порожденное метрическим пополнением $\tilde{\mathbf{P}}$ метрического пространства $\mathbf{P}$, является пополнением δ-пространства P, порожденного самим $\mathbf{P}$.*

Назовем теперь отображение f δ-пространства P в δ-пространство Q c-отображением, если оно любую центрированную c-систему ξ пространства P переводит в (центрированную) c-систему $f(\xi)$ пространства Q. Функцию f, определенную на δ-пространстве P, назовем c-функцией, если она является c-отображением δ-пространства P в числовую прямую I.

Теорема 6. *Для того чтобы отображение f δ-пространства P в δ-пространство Q можно было продолжить в непрерывное отображение пополнения cP в пополнение cQ, необходимо и достаточно, чтобы оно было c-отображением.*

Следствие. *Всякое c-отображение δ-пространства P в δ-пространство Q непрерывно.*

Теорема 7. *Всякое δ-отображение* ([3], [5]) *f δ-пространства P в δ-пространство Q является c-отображением.*

Следствие. *Всякое δ-отображение f δ-пространства P в δ-пространство Q продолжаемо в δ-отображение пополнения cP в пополнение cQ.*

Назовем δ-пространство P вполне ограниченным, если из всякого равномерного δ-покрытия δ-пространства P можно выбрать конечное подпокрытие ****.

---

* Пусть A — какое-нибудь множество и $B \subseteq A$; пусть β — система подмножеств B_λ множества B; если для каждого $B_\lambda \in \beta$ существует подмножество A_λ множества A такое, что $B \cap A_\lambda = B_\lambda$, то говорят, что система β продолжаема на множество A в систему $\alpha = \{A_\lambda\}$.

** Из каждой характеристики пополнения δ-пространств (в том числе и из этой) вытекает и соответствующая характеристика полноты. Ради краткости изложения последние всюду опускаются.

*** Систему ξ множеств топологического пространства R называют замкнутой (соотв., открытой), если каждое $X \in \xi$ замкнуто (соотв., открыто) в R.

**** В. А. Ефремович называет δ-пространство вполне ограниченным, если оно не содержит множества, δ-гомеоморфного множеству натуральных чисел ([6]). Однако это его определение, годное для метрических пространств, в случае δ-пространств кажется мне не отвечающим своему назначению, так как существуют бикомпакты, не являющиеся вполне ограниченными в смысле В. А. Ефремовича (вопреки тому, что утверждалось мною в ([3])). Пример такого бикомпакта дает бикомпактное δ-расширение uN множества N всех натуральных чисел.

Теорема 8. *δ-пространство P вполне ограничено тогда и только тогда, если его пополнение бикомпактно (и, стало быть, совпадает с δ-расширением uP).*

Следствие. *Для того чтобы δ-пространство P было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было полным и вполне ограниченным.*

Из теоремы 8 сразу вытекает, что *в случае метрических пространств наше определение полной ограниченности совпадает с обычным.*

Теорема 9. *Для того чтобы δ-пространство было вполне ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы всякая c-функция была ограничена* *.

Легко построить пример метрического пространства, показывающий, что в этом утверждении c-функции нельзя заменить δ-функциями. Из теоремы 6 вытекает, что всякую c-функцию, определенную на δ-пространстве P, можно продолжить на пополнение cP в непрерывную функцию. Естественно предположить, что это свойство пополнения cP является характеристическим его свойством в том смысле, что *cP является наибольшим из всех δ-расширений δ-пространства P, обладающих этим свойством.* Однако доказать это предложение мне удалось лишь для частного случая, когда δ-пространство P финально-компактно**.

Назовем действительную и неотрицательную функцию $\rho(x, y)$, определенную на δ-пространстве P, псевдометрикой этого δ-пространства, если для любых точек x, y и z выполнены условия: $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ и если для любого множества $M \subseteq P$ каждая его сферическая окрестность является δ-окрестностью.

Теорема 10. *Для любой последовательности π δ-покрытий γ_n δ-пространства P, в которой каждое γ_{n+1} звездно вписано*** *в γ_n, существует псевдометрика $\rho(x, y)$, для которой π является конфинальной подсистемой системы всех точных ε-покрытий* ****.

Следствие. *Для того чтобы δ-пространство P было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность δ-покрытий γ_n, в которой каждое γ_{n+1} звездно вписано в γ_n, что для каждого $x \in P$ система звезд $U_n x$ является базой пространства P в точке x.*

Теорема 11. *Пополнение δ-пространства P есть наименьшее из всех его δ-расширений, на каждое из которых можно продолжить* ***** *всякую псевдометрику δ-пространства P.*

Теорема 12. *δ-пространство P тогда и только тогда вполне ограничено, если вполне ограничена всякая его псевдометрика.*

Равномерным пространством А. Вейль ([7]) называет всякую равномерную структуру множества S вместе с порожденной ею на S топологией. Известно ([3], [4]), что всякое равномерное пространство порождает и некоторую «близость» между множествами. Оказывается, что *δ-пространство P_W, порожденное пополнением $\tilde{W}$ равномерного пространства W, есть полное δ-расширение δ-пространства P, порожденного самим W.* Таким образом мы получаем *подобное отображение частично упорядоченного множества всех равномерных пространств (структур),*

---

* В отличие от предыдущих утверждений, это предложение ново и для метрических пространств.

** Топологическое пространство называется финально-компактным, если из всякого его открытого покрытия можно выбрать конечное или счетное подпокрытие.

*** Звездой точки $x \in P$ относительно покрытия γ называется сумма всех $\Gamma \in \gamma$, содержащих x; покрытие γ звездно вписано в α, если система звезд всех точек $x \in P$ относительно покрытия γ вписана в α.

**** Точным ε-покрытием δ-пространства P с псевдометрикой $\rho(x, y)$ называется система сферических окрестностей всех точек $x \in P$.

***** Разумеется, в псевдометрику того или иного δ-расширения.

совместимых с данным δ-пространством P, в частично упорядоченное множество (полных) δ-расширений δ-пространства P.

Теорема 13. *Для любого δ-пространства P*

$$cP = \bigcap P_W,$$

где W пробегает множество всех равномерных пространств (структур), совместимых с P.

Теорема 14. *δ-пространство вполне ограничено тогда и только тогда, если оно имеет всего лишь одно совместимое с ним равномерное пространство (структуру).*

Следствие (теоремы 13). *Если δ-пространство P имеет максимальное совместимое с ним равномерное пространство W_c, то $P_{W_c} = cP$.*

Критерий наличия максимальной структуры был дан (не будучи выделен в качестве самостоятельного предложения) в работе ([4]).

Теорема 15. *Для того чтобы δ-пространство P имело максимальную совместимую с ним структуру, необходимо и достаточно, чтобы произведение * любых двух равномерных δ-покрытий было δ-покрытием.*

Приведем пример δ-пространства S, не обладающего максимальной структурой: точками S являются все рациональные числа. Пусть σ и τ — такие иррациональные числа, отношение которых также иррационально. Множества A и B из S близки тогда и только тогда, если для каждого натурального i найдутся такие целые числа m и n, что интервалы $\left(\sigma + \frac{m}{2^i}; \sigma + \frac{m+1}{2^i}\right)$ и $\left(\sigma + \frac{n}{2^i}\tau; \sigma + \frac{n+1}{2^i}\tau\right)$ пересекаются и с A и с B. Легко показать, что все аксиомы В. А. Ефремовича ([5]) выполнены. Однако произведение равномерного δ-покрытия, состоящего из интервалов вида $(\sigma + m; \sigma + m + 1)$, с равномерным δ-покрытием, состоящим из интервалов вида $(\sigma + n\tau; \sigma + n\tau + \tau)$, не является δ-покрытием. Стало быть, S не имеет максимальной структуры.

Наконец, назовем систему $\mathfrak{B}$ множеств δ-пространства P δ-базой, если для любого $A \subseteq P$ и любой его δ-окрестности $\Gamma \supseteqq A$ существует $U \in \mathfrak{B}$ такое, что $\Gamma \supseteqq U \supseteqq A$. Наименьшую из мощностей всевозможных δ-баз данного δ-пространства P назовем δ-весом δ-пространства P.

Теорема 16. *Для того чтобы δ-пространство P было метризуемым и вполне ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело не более чем счетный δ-вес.*

Поступило
21 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, ДАН, **37**, № 4, 138 (1942). [2] Д. А. Райков, Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, 513 (1946). [3] Ю. М. Смирнов, ДАН, **84**, № 5, 895 (1952). [4] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., **31** (73) : 3, 543 (1952). [5] В. А. Ефремович, ДАН, **76**, № 3, 341 (1951). [6] В. А. Ефремович, Матем. сборн., **31** (73): 1, 189 (1952). [7] N. Bourbaki, Actualités scientifiques et industrielles, 1942, p. 858.

* Произведением покрытий α и β множества P называется покрытие, состоящее из всевозможных пересечений вида $A \cap B$, где $A \in \alpha$ и $B \in B$.