

И. В. СВИРСКИЙ

О ТОЧНОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 20 XII 1952)

В этой статье мы рассматриваем вопрос об оценке точности метода Галеркина для решения уравнений типа:

$$Hf(x) = h_1(x), \quad f \in D(H),$$

где H — линейный дифференциальный симметричный оператор с точечным спектром, полуограниченный снизу.

При применении метода Галеркина приближенное решение ищется в виде линейной комбинации подходящим образом подобранных векторов (функций):

$$f(x) = \sum_1^n c_i \psi_i(x), \quad \psi_i \in D(H),$$

причем постоянные c_i определяются из системы уравнений:

$$\sum_1^n c_i (H\psi_i, \psi_k) = (h_1, \psi_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Заметим, что для того случая, когда оператор H является неотрицательным, метод Галеркина дает, как известно, точно такие же результаты, какие дает вариационный метод, состоящий в минимизации подходящим образом выбранного функционала.

Для выяснения сущности предлагаемого метода оценки рассмотрим в качестве примера задачу об установившихся колебаниях струны, подверженной действию сил, распределенных с линейной плотностью $p(x)$ и меняющихся со временем с угловой частотой ω .

Легко показать, что эта задача сводится к решению уравнения

$$Hf = -\partial_x^2 f(x) - \frac{\rho\omega^2}{T} f(x) = \frac{P(x)}{T} = h_1(x)$$

в совокупности с граничными условиями

$$f(0) = f(l) = 0.$$

Здесь ρ — линейная плотность струны, T — натяжение струны, $f(x)$ — амплитуда колебаний точек струны, l — ее длина.

Для оценки погрешности решения в точке a введем в рассмотрение некоторую функцию $\tilde{u}(x)$, удовлетворяющую условиям $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(l) = 0$ и обладающую непрерывной первой производной на всем интервале $0 \leq x \leq l$, кроме точки a , где она испытывает скачок

величины 1. Путем интегрирования по частям можно вывести следующую формулу:

$$f(a) = \int_0^{\overline{l}} fH\tilde{u} dx - \int_0^l Hf\tilde{u} dx = \int_0^{\overline{l}} fH\tilde{u} dx - \int_0^l h_1\tilde{u} dx. \quad (1)$$

Черта над интегралами обозначает, что они распространяются на интервал $0 \leq x \leq l$, из которого исключена точка a .

Так как второй интеграл в правой части уравнения содержит известные величины, то определение величины $f(a)$ сводится к нахождению скалярного произведения функции f на функцию $h_2 = H\tilde{u}$. Подобные формулы можно легко получить и для других типов дифференциальных уравнений.

Определение. Под числом отрицательных характеристических чисел симметрического оператора H мы будем понимать максимум числа отрицательных собственных значений операторов, индуцированных во всевозможных конечномерных подпространствах области определения оператора H этим оператором.

Предложение 1. Если симметрические операторы H и H_1 имеют общую область определения и одинаковое конечное число отрицательных характеристических чисел и если между ними имеет место неравенство $H_1 \leq H$ относительно $D(H_1) = D(H)$ (1), т. е. если для них выполняется неравенство

$$(H_1 f, f) \leq (H f, f), \quad (2)$$

то для их обратных операторов имеет место неравенство

$$(H_1^{-1} h, h) \geq (H^{-1} h, h), \quad (3)$$

справедливое для любого вектора h , лежащего одновременно в областях определения операторов H_1^{-1} и H^{-1} .

Приближенное значение оператора, обратного к оператору H , полученное методом Галеркина, мы в дальнейшем будем обозначать через $[H]_n$.

Используя предложение 1, можно доказать, что приближенное значение $[H]_n^{-1}$ оператора, обратного к оператору H , полученное методом Галеркина, будет при некоторых условиях меньше истинного значения обратного оператора. Только что упомянутые условия состоят в том, что число отрицательных характеристических чисел оператора H должно совпадать с числом отрицательных характеристических чисел оператора, индуцированного оператором H в подпространстве, порожденном теми векторами ψ_1, \dots, ψ_n , которые были использованы при применении метода Галеркина. При доказательстве предыдущего утверждения используется то обстоятельство, что метод Галеркина можно интерпретировать как нахождение обратного оператора к оператору H , у которого предварительно та его часть, которая действует в подпространстве, ортогональном к векторам ψ_1, \dots, ψ_n , увеличена до бесконечности (из-за недостатка места мы не даем более подробного пояснения).

С другой стороны, метод, изложенный в статье (1), позволяет построить симметрический оператор простой структуры, обозначаемый в статье через H_4 , который аппроксимирует оператор H снизу, т. е. так, чтобы выполнялось неравенство

$$(H_4 f, f) \leq (H f, f), \quad f \in D(H) \subset D(H_4). \quad (4)$$

Пользуясь предложением 1, мы заключаем, что оператор, обратный к оператору H_4 , который легко вычисляется путем применения конечного числа операций, удовлетворяет неравенству

$$(H_4^{-1}f, f) \geq (H^{-1}f, f), \quad f \in D(H).$$

Предыдущие два заключения можно записать так:

$$([H]_n^{-1}f, f) \leq (H^{-1}f, f) \leq (H_4^{-1}f, f), \quad f \in D(H). \quad (5)$$

Рассмотрим задачу: в каких пределах может находиться величина (Ah_1, h_2) при заданных векторах h_1 и h_2 , если относительно оператора A известно только то, что он удовлетворяет неравенству

$$(A_1f, f) \leq (Af, f) \leq (A_2f, f) \quad (6)$$

при любом $f \in D(A)$, где A_1 и A_2 — заданные ограниченные самосопряженные операторы.

Ответ. Точка комплексной плоскости, изображающая величину (Ah_1, h_2) , лежит внутри или на контуре эллипса, центр которого характеризуется числом

$$c = \frac{(A_1h_1, h_2) + (A_2h_1, h_2)}{2}, \quad (7)$$

а длины большой и малой полуосей которого суть:

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\{(A_2h_1, h_1) - (A_1h_1, h_1)\} \{(A_2h_2, h_2) - (A_1h_2, h_2)\}}, \quad (8)$$

$$b = \sqrt{\{(A_2h_1, h_1) - (A_1h_1, h_1)\} \{(A_2h_2, h_2) - (A_1h_2, h_2)\} - |(A_2h_1, h_2) - (A_1h_1, h_2)|^2}. \quad (9)$$

Большая ось эллипса направлена параллельно вектору комплексной плоскости, характеризуемому числом $[(A_2h_1, h_2) - (A_1h_1, h_2)]$.

В том случае, если величины (Ah_1, h_2) , a и b вещественны, для величины (Ah_1, h_2) имеют место границы: $c - a \leq (Ah_1, h_2) \leq c + a$. Эти границы не могут быть сужены. Пользуясь решением этой задачи, можно с учетом неравенства (5) сразу получить границы для величины $(H^{-1}h_1, h_2)$. Однако оказывается более удобным поступить следующим образом. Рассмотрим тождество

$$(H^{-1}h_1, h_2) = (H^{-1}[h_1 - H\Phi_1 + H\Phi_1], h_2) = (H^{-1}[h_1 - H\Phi_1], h_2) + (\Phi_1, h_2) = (h_1 - H\Phi_2, H^{-1}h_2) + (\Phi_1, h_2) = (h_1 - H\Phi_1, H^{-1}[h_2 - H\Phi_2 + H\Phi_2]) + (\Phi_1, h_2)$$

и, далее,

$$(H^{-1}h_1, h_2) = (H^{-1}[h_1 - H\Phi_1], [h_2 - H\Phi_2]) + (h_1 - H\Phi_1, \Phi_2) + (\Phi_1, h_2). \quad (10)$$

Здесь через Φ_1 и Φ_2 обозначены приближенные решения $\sum_1^n c_i \psi_i$

и $\sum_1^n d_i \psi_i$ уравнений

$$Hf = h_1, \quad Hf = h_2,$$

полученные методом Галеркина.

Эти приближенные решения, как известно, определяются уравнением

$$(H\Phi_1, \psi_k) = 0, \quad (H\Phi_2, \psi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Пользуясь этим и учитывая, что вектор Φ_2 есть линейная комбинация векторов ψ_k , мы можем заключить, что второй член правой части формулы (10) обращается в нуль. Поэтому приближенное значение (Φ_1, h_2) величины $(H^{-1}h, h_2)$, полученное методом Галеркина, отличается от истинного решения на величину

$$\varepsilon = (H^{-1}[h_1 - H\Phi_1], h_2 - H\Phi_2).$$

Обозначая «неуравновешенности» приближенных решений $(h_1 - H\Phi_1)$ и $(h_2 - H\Phi_2)$ через h_1^* и h_2^* , мы получим, что величина погрешности ε метода Галеркина определяется величиной

$$\varepsilon = (H^{-1}h_1^*, h_2^*).$$

Ввиду того что оператор H^{-1} удовлетворяет неравенству (5), мы можем, применяя решение предыдущей задачи, сразу указать эллипс комплексной плоскости, внутри которого лежит вектор, изображающий величину погрешности ε . Полуоси этого эллипса и его центр определяются формулами (7), (8) и (9), в которых операторы A_1 и A_2 заменены операторами $[H]_n^{-1}$ и H_4^{-1} , а векторы h_1 и h_2 — векторами h_1^* и h_2^* .

Полученные границы для величины ε , а также все ниже следующие границы справедливы только в том случае, если операторы H_4^{-1} и $[H]_n$ имеют одинаковое число отрицательных характеристических чисел. В том случае, если все скалярные произведения, входящие в предыдущие формулы, вещественны, можно для величины ε предложить хотя и несколько менее точную, но зато более простую оценку:

$$\frac{1}{2\lambda_{m+1}^0} [(h_1^*, h_2^*) - V(h_1^*, h_1^*)(h_2^*, h_2^*)] \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2\lambda_{m+1}^0} [(h_1^*, h_2^*) + V(h_1^*, h_1^*)(h_2^*, h_2^*)].$$

Здесь величина λ_{m+1}^0 определяется формулой (11) статьи (1).

Последняя формула справедлива только в том случае, если число отрицательных чисел среди ряда чисел $\lambda_1^0, \dots, \lambda_{m+1}^0$ не больше числа отрицательных характеристических чисел матрицы с элементами $(H\varphi_i, \varphi_k)$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$).

Физико-технический институт
Казанского филиала
Академии наук СССР

Поступило
5 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. В. Свирский, ДАН, 87, № 6 (1952).