Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

К. А. РОДОССКИЙ

О НАИМЕНЬШЕМ ПРОСТОМ ЧИСЛЕ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ И НУЛЯХ L-ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 12 XII 1952)

Вопрос о порядке роста наименьшего простого числа $p_{\min}(l, D)$ в арифметических прогрессиях $nD+l$, где l пробегает числа ряда $1, 2, \ldots, D-1$, взаимно простые с D, был решен Ю. В. Линником в 1944 г. [1]. Им получена оценка

$$\ln p_{\min}(l, D) < c \ln D, \qquad (1)$$

где $c>0$ — абсолютная постоянная. Известное (до настоящей заметки) доказательство этого неравенства основывается, между прочим, на следующих двух леммах (ниже $A, A_1, \ldots, c_1, c_2, \ldots$ обозначают абсолютные положительные постоянные):

Лемма A. *Число L-функций с характерами по модулю D, имеющих каждая хоть один нуль в прямоугольнике*

$$1-\psi \ln^{-1} D \leqslant \sigma \leqslant 1; \qquad |t| \leqslant \min\{\psi^{100}; \ln^3 D\},$$

где $\psi \in \left[2; \frac{1}{3}\ln D\right]$, *не превосходит* $e^{A\psi}$.

Доказательство леммы A (см. [1], № 2) в случае $\psi < \ln\ln D$ очень сложно.

Лемма B. *Каждый круг радиуса* $r \in \left[\ln^{-1} D; \frac{1}{2}\right]$ *и с центром, лежащим на отрезке* $\{\sigma=1;\ |t|\leqslant D\}$, *содержит не более, чем* $c_1 r \ln D$ *нулей* $L(s, \chi)$ *(подсчитанных с учетом кратности);* χ *— характер по модулю* D.

Очень простое доказательство этой леммы изложено Ю. В. Линником в работе [2].

В этой заметке автор дает новое доказательство неравенства (1). Это доказательство также основывается на простой лемме B, а вместо леммы A автор использует более слабую лемму A^1.

Лемма A^1. *Число L-функций с характерами по модулю D, имеющих каждая хоть один нуль в прямоугольнике* (R)

$$1-\psi \ln^{-1} D \leqslant \sigma \leqslant 1; \quad |t| \leqslant e^{\psi} \ln^{-1} D \quad (2 \leqslant \psi \leqslant \ln\ln D) \qquad (R)$$

или в прямоугольнике (R')

$$1-\psi \ln^{-1} D \leqslant \sigma \leqslant 1; \quad |t| \leqslant 1 \quad \left(\ln\ln D \leqslant \psi \leqslant \frac{9}{10}\ln D\right) \qquad (R')$$

не превосходит $e^{A_1\psi}$.

Имеется весьма простое доказательство леммы A[1] в случае $\psi \geqslant \ln\ln D$ ([3]). В случае $\psi \leqslant \ln\ln D$ доказательство проводится по схеме, изложенной автором в статье ([4]), и ниже мы остановимся на основных его моментах.

Итак, пусть $L(s, \chi)$ (χ — неглавный характер по модулю D) имеет нуль $\rho_{0\chi} = \beta_{0\chi} + i\tau_{0\chi}$ в прямоугольнике (R). Можно показать, что тогда существует «удобный нуль» $\rho_{1\chi} = \beta_{1\chi} + i\tau_{1\chi}$ (быть может, $\rho_{1\chi} = \rho_{0\chi}$) такой, что прямоугольник (R_1)

$$\beta_{1\chi} + (k \ln D)^{-1} \leqslant \sigma \leqslant 1; \qquad |t - \tau_{1\chi}| \leqslant 4e^{\psi} \ln^{-1} D \tag{R}$$

не содержит нулей $L(s, \chi)$.

При этом $\beta_{1\chi} \geqslant 1 - \psi \ln^{-1} D$; $|\tau_{1\chi} - \tau_{0\chi}| \leqslant 4k\psi e^{\psi} \ln^{-1} D$; $k > 1$ — постоянная, которая выбирается в дальнейшем. Обозначим

$$\sigma_{1\chi} = \beta_{1\chi} + 2(k \ln D)^{-1}; \qquad \sigma_2 = e^{\psi} \ln^{-1} D$$

и определим контур Γ, состоящий из отрезков:

$$\Gamma_1 [\sigma_2 + i\tau_{1\chi} - 2ie^{\psi} \ln^{-1} D; \quad \sigma_2 - i\infty];$$
$$\Gamma_2 [\sigma_{1\chi} + i\tau_{1\chi} - 2ie^{\psi} \ln^{-1} D; \quad \sigma_2 + i\tau_{1\chi} - 2ie^{\psi} \ln^{-1} D];$$
$$\Gamma_3 [\sigma_{1\chi} + i\tau_{1\chi} + 2ie^{\psi} \ln^{-1} D; \quad \sigma_{1\chi} + i\tau_{1\chi} - 2ie^{\psi} \ln^{-1} D];$$
$$\Gamma_4 [\sigma_2 + i\tau_{1\chi} + 2ie^{\psi} \ln^{-1} D; \quad \sigma_{1\chi} + i\tau_{1\chi} + 2ie^{\psi} \ln^{-1} D];$$
$$\Gamma_5 [\sigma_2 + i\infty; \quad \sigma_2 + i\tau_{1\chi} + 2ie^{\psi} \ln^{-1} D].$$

Берем $s_{1\chi} = \sigma_{1\chi} + i\tau_{1\chi}$, $N = k \ln D$ и рассматриваем интеграл

$$I(s_{1\chi}, \chi, N) = -\frac{iN}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{(2)} \frac{L'}{L}(w, \chi)\, e^{(s_{1\chi} - w)^2 N^2}\, dw = -\frac{iN}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\Gamma}.$$

Применяя лемму B, можно показать, что

$$\mathrm{Re} - \frac{iN}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{L'}{L}(w, \chi)\, e^{(s_{1\chi} - w)^2 N^2}\, dw > c_2 k \ln D; \quad \left| \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_5} \right| < \frac{1}{4} c_2 k \ln D,$$

т. е.

$$|I(s_{1\chi}, \chi, N)| > \frac{3}{4} c_2 k \ln D. \tag{2}$$

С другой стороны, известно ([4]), что

$$I(s, \chi, N) = -\sum_{n=2}^{\infty} \chi(n)\, \Lambda(n)\, n^{-s} e^{-\ln^2 n / 4N^2}. \tag{3}$$

Введем число $Z = \exp \dfrac{\ln D \cdot \ln \psi}{2\psi}$ и функции

$$f_1(s, \chi) = \sum_{Z < p < D^2} \chi(p) \ln p \cdot p^{-s} e^{-\ln^2 p / 4N^2}; \quad f_2(s, \chi) = \sum_{p > D^2} \chi(p) \ln p \cdot p^{-s} e^{-\ln^2 p / 4N^2}.$$

Из (2) и (3) следует, что при $\psi \geqslant c_3$ и подходящем k

$$|f_1(s_{1\chi}, \chi) + f_2(s_{1\chi}, \chi)| > 2 \ln D. \tag{4}$$

Возьмем теперь точку $s_{0\chi} = \sigma_2 + i\tau_{1\chi}$ и числа

$$r_{1\chi} = \sigma_2 - \sigma_{1\chi}; \quad r_{2\chi} = r_{1\chi} - (170\, k^2 \ln D)^{-1}; \quad r_3 = \psi\, (2 \ln D)^{-1}$$

и рассмотрим три окружности

$$C_{1\chi} \{|s - s_{0\chi}| = r_{1\chi}\}; \quad C_{2\chi} \{|s - s_{0\chi}| = r_{2\chi}\}; \quad C_{2\chi} \{|s - s_{0\chi}| = r_3\}.$$

Пусть Q — число тех характеров по $\operatorname{mod} D$, соответствующие которым L-функции имеют нули в прямоугольнике (R). Рассмотрим еще кольцо $(\mathscr{E}_\chi)$

$$r_{1\chi} - (2k \ln D)^{-1} \leqslant |s - s_{0\chi}| \leqslant r_{1\chi} + (2k \ln D)^{-1}. \qquad (\mathscr{E}_\chi)$$

Ввиду неравенства (4) может быть два случая:

I. Или больше чем для $^1/_2\, Q$ этих характеров найдется для каждого из них своя точка $s_{2\chi} \in \mathscr{E}_\chi$, для которой

$$|f_1(s_{2\chi}, \chi)| > \ln D.$$

II. Или больше чем для $^1/_2\, Q$ этих характеров

$$\max_{s \in C_{1\chi}} |f_2(s, \chi)| = M_{1\chi} > \ln D.$$

В первом случае делаем приведение к одной точке s_2, пользуясь тем, что точки $s_{2\chi}$ расположены сравнительно близко друг от друга. Дальше рассуждаем так же, как и в упомянутой работе [4], с одним уточнением, заключающимся в применении оценки числа чисел в арифметической прогрессии, простые делители которых достаточно велики [5].

Если имеет место второй случай, то можно доказать

$$\max_{s \in C_{2\chi}} |f_2(s, \chi)| \geqslant \frac{1}{2} M_{1\chi},$$

а отсюда по теореме о трех кругах следует

$$\max_{s \in C_{3\chi}} |f_2(s, \chi)| \geqslant \ln D \cdot e^{-C_6 k \psi}$$

и требуемая оценка получается проще, чем в первом случае.

Покажем теперь, как из лемм A[1] и B следует неравенство (1).

Ради простоты ограничимся случаем, когда исключительный нуль отсутствует. Пусть $x > 0$. Полагаем

$$\Phi(x, l, D) = \varphi(D) \sum_{\substack{n=2 \\ n \equiv l \,(\operatorname{mod} D)}}^{\infty} \Lambda(n) \sqrt{n} \exp\left(-\frac{\ln^2 n}{4x \ln D}\right) =$$

$$= i \sqrt{\frac{x \ln D}{\pi}} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \int_{(2)} \frac{L'}{L}(w, \chi)\, e^{\left(-\frac{1}{2} - w\right)^2 x \ln D}\, dw.$$

Обозначим $\rho_\chi = \beta + i\tau$ нули $L(s, \chi)$ и $\delta = 1 - \beta > C_5 \ln^{-1} D\, (|\tau| + 2)$. Переходя в последнем интеграле с контура $\operatorname{Re} w = 2$ на контур $\operatorname{Re} w = -\frac{1}{2}$, после небольших расчетов получаем:

$$\Phi(x, l, D) \left(2 \sqrt{\pi x \ln D}\, D^{9/4\, x}\right)^{-1} - 1 =$$

$$= - \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{\rho_\chi} e^{-(\delta(3-\delta) + \tau^2 - i\tau(3-2\delta)) x \ln D} + O\left(\sqrt{\ln D} \cdot D^{1 - \frac{9}{4} x}\right).$$

Последнее тождество интегрируем повторно $B = 2([A_1] + 1)$ раз

$$\int_{x_0}^{x_0+1} \int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+1} \cdots \int_{x_1}^{x_1+1} \Phi(x, l, D) \left(2 \sqrt{\pi x \ln D} \cdot D^{\frac{9}{4} x}\right)^{-1} dx\, dx_1 \ldots dx_{B-1} - 1 =$$

$$= 2^B \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{\rho_\chi} \theta_{\rho_\chi} \frac{e^{-(\delta(3-\delta) + \tau^2) x_0 \ln D}}{(\delta(3-\delta) + \tau^2 + i\tau(3-2\delta))^B \ln^B D} + O\left(D^{1 - \frac{9}{4} x_0}\right),$$

где $|\theta_{\rho_\chi}| \leqslant 1$. С помощью лемм A^1 и B убеждаемся, что правая часть есть величина порядка $e^{-C_5 x_0}$ и при большом x_0 будет меньше, например, $1/4$. Кроме того, при $\ln z = 6(x_0 + B)\ln D$

$$\Phi(x, l, D) = \sum_{\substack{p \leqslant z \\ p \equiv l \pmod{D}}} \ln p \cdot \sqrt{p}\, e^{-\ln^2 p/4x \ln D} + O(e^{-\ln^2 z/4x\ln D + 3/2 \ln z} + \ln D \cdot D^{2x}).$$

и поэтому при надлежащем x_0 получаем

$$\int_{x_0}^{x_0+1} \int_{x_{B-1}}^{x_{B-1}+1} \cdots \int_{x_1}^{x_1+1} \sum_{\substack{p \leqslant z \\ p \equiv l \pmod{D}}} \ln p \cdot \sqrt{p}\, e^{-\ln^2 p/4x\ln D} (2\sqrt{\pi x \ln D} \cdot D^{3/4 x})^{-1} \times$$

$$\times\, dx\, dx_1 \ldots dx_{B-1} > \frac{1}{2}.$$

Отсюда непосредственно следует неравенство (1).

Поступило
10 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, Матем. сборн., **15** (57), 1, 2, 3 (1944). [2] Ю. В. Линник, там же, **16** (58), 2 (1945). [3] К. А. Родосский, Укр. матем. журн., **3**, 4, 399 (1951). [4] К. А. Родосский, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 315 (1949). [5] А. А. Бухштаб, Матем. сборн., **28** (70), 1 (1951).