Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОРНЯ ИЗ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 XII 1952)

1. Если оператор Γ является градиентом некоторого функционала, заданного в гильбертовом пространстве, то вариационные методы во многих случаях позволяют исследовать уравнения вида $\varphi = \lambda\Gamma\varphi$ — доказывать теоремы существования решений, теоремы о существовании собственных функций и т. д.

Пусть теперь Γ_1 — оператор градиента некоторого функционала $F(\varphi)$, заданного в банаховом пространстве E. Как известно, в этом случае оператор Γ_1 действует из пространства E в пространство E^* непрерывных функционалов на E.

Если H — непрерывный линейный оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ в пространство E, то нетрудно видеть, что оператор $H^*\Gamma_1 H$ будет градиентом функционала $F(H\varphi)$, определенного уже на пространстве $\mathfrak{H}$. Через H^* мы обозначаем здесь линейный оператор, сопряженный оператору H и действующий из E^* в $\mathfrak{H}$.

Таким образом, вариационные соображения позволяют исследовать уравнения вида $\varphi = \lambda H^*\Gamma_1 H\varphi$.

Если $\varphi \in \mathfrak{H}$ — решение последнего уравнения, то функция $\psi = H\varphi$ из пространства E будет решением уравнения $\psi = \lambda HH^*\Gamma_1\psi$. Таким образом, вариационные методы позволяют исследовать уравнения вида $\varphi = \lambda K\varphi$ с оператором K, допускающим представление $K = HH^*\Gamma_1$, где Γ_1 — оператор градиента функционала, заданного на некотором банаховом пространстве E; H — линейный оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ в E; H^* — сопряженный к H оператор.

Многие задачи приводят к изучению уравнения $\varphi = \lambda A\Gamma_1\varphi$, где Γ_1 — оператор градиента, а A — линейный интегральный оператор. Примером такого оператора может служить нелинейный интегральный оператор Гаммерштейна

$$K\varphi(x) = \int_G K(x, y) f[y, \varphi(y)]\, dy, \tag{1}$$

где G — некоторое измеримое множество конечной или бесконечной меры. В дальнейшем мы будем предполагать, что каждое множество $G_1 \subset G$ конечной меры может быть разбито на две части половинной меры. Оператор (1) может быть представлен в виде $K = A\Gamma_1$, где

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y)\varphi(y)\, dy \tag{2}$$

и $\Gamma_1\varphi(x) = f[x, \varphi(x)]$. Оператор Γ_1 является градиентом некоторого функционала в пространстве L^p, если только он действует из L^p в L^q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

Для того чтобы применить вариационные методы к изучению уравнения (1), мы должны, в силу приведенных выше соображений (для случая $E=L^2$ приведенных еще Голомбом ([2])), найти условия, при которых линейный интегральный оператор A представим в виде $A=HH^*$, где H действует из пространства L^2 в L^p.

В ([1]) мы изучали оператор (2), определенный положительно определенным ядром $K(x, y)$, удовлетворяющим условиям

$$\iint\limits_{GG} |K(x, y)|^2 dx\, dy < \infty, \qquad \iint\limits_{GG} |K(x, y)|^{p_0} dx\, dy < \infty, \tag{3}$$

где $p_0 > 2$. В частности, в ([1]) было показано, что оператор (2) расщепляем, т. е. представим в виде $A=HH^*$, где линейный оператор H действует из L^2 в L^p $(2 \leqslant p < p_0)$ и вполне непрерывен.

Настоящая заметка посвящена задаче о расщеплении линейных интегральных операторов, некоторые итерации которых удовлетворяют определенным условиям.

2. Доказательства приводимых ниже утверждений существенно используют неравенство, которое просто доказывается при помощи неравенства Гельдера (если воспользоваться спектральным разложением оператора), но представляет, как нам кажется, самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Пусть R — положительный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда при всех $p \geqslant 1$ и для любого элемента φ из области определения оператора R^p выполняется неравенство*

$$(R\varphi, \varphi)^p \leqslant (R^p\varphi, \varphi)(\varphi, \varphi)^{p-1}.$$

3. Через $K_r(s, t)$ будем обозначать r-ю итерацию ядра $K(s, t)$:

$$K_r(s, t) = \int\limits_G \cdots \int\limits_G K(s, s_1) K(s_1, s_2) \cdots K(s_{r-1}, t)\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_{r-1}.$$

Теорема 2. *Пусть r-я итерация $K_r(s, t)$ положительно определенного ядра $K(s, t)$ удовлетворяет условиям*

$$\iint\limits_{GG} |K_r(s, t)|^2 ds\, dt < \infty$$

и

$$\iint\limits_{GG} |K_r(s, t)|^{p_0} ds\, dt < \infty,$$

где $p_0 > 2$.

Тогда оператор $A^{1/2}$, где A — линейный интегральный оператор, определенный равенством (2), действует из пространства L^2 в пространство L^p, где p — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$2 \leqslant p < \frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2}.$$

Если через H обозначить оператор $A^{1/2}$, рассматриваемый как оператор, действующий из L^2 в L^p, то H вполне непрерывен.

При $r=1$ утверждение теоремы 2 переходит в теорему, доказанную в ([1]) и приведенную в начале настоящей заметки. При $r>1$ условия теоремы 2 обеспечивают действие оператора $A^{1/2}$ из L^2 в более узкие классы пространств L^p, чем при $r=1$, так как при $r>1$ всегда

$$\frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2}<p_0.$$

Однако теорема 2 и при $r>1$ содержит положительное утверждение, так как всегда

$$\frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2}>2.$$

Отметим, что утверждение теоремы 2 справедливо и для абстрактных положительных операторов A, заданных на L^2, если в формулировке теоремы условия, наложенные на итерацию ядер, сформулировать в терминах степеней изучаемого оператора A. При этом, конечно, число r в формулировке теоремы не должно быть обязательно целым.

4. В этом пункте мы ограничимся случаем, когда $\operatorname{mes} G<\infty$ (при этом мы снова предполагаем, что каждое подмножество множества G можно разбить на две части половинной меры; последнее условие выполнено всегда, если G является множеством n-мерного евклидова пространства с лебеговой мерой).

Т е о р е м а 3. *Пусть $K(s,t)$ — симметричное положительно определенное ядро, r-я итерация которого удовлетворяет условию*

$$\operatorname{vrai}\max_{s,t\in G}|K_r(s,t)|=a<\infty.$$

Пусть

$$2\leqslant p<2+\frac{2}{r-1}.$$

Тогда оператор $H=A^{1/2}$ действует из пространства L^2 в пространство L^p и является вполне непрерывным оператором.

Теорема 3 является непосредственным обобщением теоремы, согласно которой оператор $A^{1/2}$ преобразует каждый шар пространства L^2 во множество функций, равномерно ограниченных в существенном, если A — это линейный интегральный оператор (2), определенный ограниченным положительно определенным ядром $K(s,t)$.

5. Из обычных соображений следует, что в условиях теорем 2 и 3 линейный интегральный оператор (2) расщепляем, т. е. представим в виде $A=HH^*$, на $L^2\cap L^q$. Поэтому для применения результатов заметки к изучению, например, операторов Гаммерштейна приходится дополнительно предполагать, что оператор Γ_1 действует из пространства L^p в пространство L^2.

Повидимому, в условиях теорем 2 и 3 оператор A является непрерывным оператором, действующим из пространства L^q в сопряженное пространство L^p (непосредственно из условий теоремы следует только, что оператор A_r, порожденный r-й итерацией ядра, действует из L^{q_0} в L^{p_0} и вполне непрерывен). Из теорем 2 или 3 следует лишь, что для функций $\varphi\in L^2\cap L^q$

$$\left\{\int_G|A\varphi(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}<b\left\{\int_G|\varphi(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}},$$

где b — некоторая постоянная.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
29 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, ДАН, **82**, № 3 (1952). [2] M. Golomb, Math. Z., **39**, 1 (1934).