Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. И. КОРЕНБЛЮМ

ОБЩАЯ ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ ОТНОШЕНИЯ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 23 XII 1952)

1. М. В. Келдыш [1,2] установил следующую тауберову теорему, использованную им для оценки собственных значений некоторых общих классов несамосопряженных функциональных уравнений.

Пусть $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ — *положительные возрастающие функции, определенные при* $x>0$, *причем* $\varphi(x)$ *дифференцируема и удовлетворяет условиям* $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$ *и для достаточно больших* x

$$\alpha\varphi(x)<x\varphi'(x)<\beta\varphi(x), \tag{1}$$

где α *и* β *удовлетворяют неравенствам* $0<\beta<\alpha+1$, *и пусть*

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{d\varphi(\xi)}{(\xi+x)^{m+1}},\quad g(x)=\int_0^\infty\frac{d\psi(\xi)}{(\xi+x)^{m+1}}, \tag{2}$$

где m — *целая часть* β. *Если при* $x\to+\infty$ $g(x)/f(x)\to 1$, *то* $\psi(x)/\varphi(x)\to 1$ *при* $x\to\infty$.

Доказательство М. В. Келдыша этой теоремы, основанное на методах теории функций комплексного переменного, существенно использует специальный вид средних (2). Естественно поставить вопрос: *для каких функций* $k(x)$ *теорема сохраняет силу, если вместо* (2) *положить*

$$f(x)=\int_0^\infty k\left(\frac{\xi}{x}\right)d\varphi(\xi),\quad g(x)=\int_0^\infty k\left(\frac{\xi}{x}\right)d\psi(\xi). \tag{2'}$$

Очевидно, случай (2) соответствует функции $k(x)=(1+x)^{-m-1}$. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция* $k(x)$ $(0<x<\infty)$ *неотрицательна, дифференцируема и удовлетворяет условиям:* а) $k(+0)>0$, $k(x)=o(x^{-\gamma})$ $(x\to\infty)$, *где* γ — *некоторое положительное число*;

б) $$\int_0^\infty|k'(x)|(1+x^\gamma)\,dx<\infty;$$

в) *интегральное уравнение*

$$\int_0^\infty k'(xt)\,s(t)\,dt=0\quad(0<x<\infty) \tag{3}$$

не имеет решений (кроме нулевого) в классе функций $s(x)$, *ограниченных на каждом конечном интервале и таких, что при* $x\to\infty$ $s(x)=O(x^\gamma)$.

Пусть, далее, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — неотрицательные неубывающие функции, определенные при $x > 0$, причем $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$$

и для достаточно больших x и $y > x$

$$\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \leqslant \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma}. \tag{4}$$

Если $f(x)$, $g(x)$ определены равенствами (2') и при $x \to \infty$

$$g(x) / f(x) \to 1, \tag{5}$$

то $\psi(x) / \varphi(x) \to 1$ при $x \to \infty$.

2. Без ограничения общности можем считать, что $\varphi(+0) = \psi(+0) = 0$, $k(+0) = 1$. Для доказательства теоремы установим несколько лемм.

Лемма 1. *Условие* в) *эквивалентно следующему:*

Для каждой функции $h(x)$ $(0 < x < \infty)$, для которой

$$\|h\| = \int_0^{\infty} |h(x)| (1 + x^{\gamma})\ dx < \infty, \tag{6}$$

и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация вида

$$p(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n k'(\alpha_n x) \quad (0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N) \tag{7}$$

такая, что

$$\int_0^{\infty} |h(x) - p(x)| (1 + x^{\gamma})\, dx > \varepsilon.$$

Доказательство этой леммы основано на рассмотрении банахова пространства H функций $h(x)$ с нормой (6) и линейных функционалов в H.

Лемма 2. *В условиях теоремы имеем при $x \to \infty$:*

1) $\varphi(x) = O(x^{\gamma})$, $\varphi(cx) \asymp \varphi(x)$ * $(c > 0)$;

2) $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(\xi)\, d\xi \asymp x\varphi(x)$; 3) $f(x) \asymp \varphi(x)$; 4) $\psi(x) = O[\varphi(x)]$.

Доказательство. 1) Оба соотношения непосредственно следуют из (4) и монотонности функции $\varphi(x)$.

2) В силу монотонности $\varphi(x)$ имеем $\frac{x}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \int_0^x \varphi(\xi)\, d\xi \leqslant x\varphi(x)$, что на основании предыдущего и доказывает требуемое.

3) Пусть $k(x) \geqslant 1/2$ на некотором интервале $(0, c)$. Тогда

$$f(x) = \int_0^{\infty} k\left(\frac{\xi}{x}\right) d\varphi(\xi) \geqslant \int_0^{cx} k\left(\frac{\xi}{x}\right) d\varphi(\xi) \geqslant \frac{1}{2}\varphi(cx) \asymp \varphi(x). \tag{8}$$

Далее, так как $k(x)$ ограничена (это следует из условия а)), то, пользуясь условиями а), б) и (4), находим:

$$f(x) = \int_0^{cx} k\left(\frac{\xi}{x}\right) d\varphi(\xi) + \int_{cx}^{\infty} k\left(\frac{\xi}{x}\right) d\varphi(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant O[\varphi(cx)] + \frac{1}{x}\int_{cx}^{\infty} \left|k'\left(\frac{\xi}{x}\right)\right| [\varphi(\xi) - \varphi(cx)]\, d\xi \leqslant$$

* Символ $\asymp$ означает, что отношение соответствующих функций для больших x заключено между двумя положительными числами.

$$\leqslant O[\varphi(cx)]+\varphi(cx)\int\limits_c^\infty |k'(x)|\left(\frac{x^\gamma}{c^\gamma}-1\right)dx = O[\varphi(cx)] = O[\varphi(x)]. \qquad (9)$$

Сопоставляя (8) и (9), получаем требуемое соотношение.

4) Так же, как (8), выводим $g(x) \geqslant {}^1/_2\,\psi(cx)$. Поэтому, на основании предыдущего и (5), имеем при $x\to\infty$

$$\psi(x)/\varphi(x) \asymp \psi(x)\Big/\varphi\left(\frac{x}{c}\right) \asymp \psi(x)\Big/ f\left(\frac{x}{c}\right) = O\left[g\left(\frac{x}{c}\right)\Big/ f\left(\frac{x}{c}\right)\right] = O(1).$$

Лемма 3. *Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда из* $\int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi \Big/ \int\limits_0^x \varphi(\xi)\,d\xi \to 1 \quad (x\to\infty)$ *следует* $\psi(x)/\varphi(x)\to 1$ $(x\to\infty)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $a > 1$. Для достаточно больших x будем иметь

$(1-\varepsilon)\int\limits_0^x \varphi(\xi)\,d\xi \leqslant \int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi \leqslant (1+\varepsilon)\int\limits_0^x \varphi(\xi)\,d\xi$; $(1-\varepsilon)\int\limits_0^{ax}\varphi(\xi)\,d\xi \leqslant \int\limits_0^{ax}\psi(\xi)\,d\xi \leqslant$ $\leqslant (1+\varepsilon)\int\limits_0^{ax}\varphi(\xi)\,d\xi$. Следовательно, $\int\limits_x^{ax}\varphi(\xi)\,d\xi - \varepsilon\left[\left(\int\limits_0^x + \int\limits_0^{ax}\right)\varphi(\xi)\,d\xi\right] \leqslant$ $\leqslant \int\limits_x^{ax}\psi(\xi)\,d\xi \leqslant \int\limits_x^{ax}\varphi(\xi)\,d\xi + \varepsilon\left[\left(\int\limits_0^x + \int\limits_0^{ax}\right)\varphi(\xi)\,d\xi\right]$. Пользуясь (3), находим

$(a-1)\,x\psi(x) \leqslant \varphi(x)\int\limits_x^{ax}\left(\frac{\xi}{x}\right)^\gamma d\xi + \varepsilon\,[x\varphi(x) + ax\varphi(x)\,a^\gamma]$; $\varphi(ax)\int\limits_x^{ax}\left(\frac{\xi}{ax}\right)^\gamma d\xi -$ $-\varepsilon\,[x\varphi(x) + ax\varphi(ax)] \leqslant (a-1)\,x\psi(ax)$. Устремляя x к ∞ и замечая, что ε при этом может быть сделано сколь угодно малым, получим $\varlimsup\limits_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \leqslant \frac{a^{\gamma+1}-1}{(\gamma+1)(a-1)}$; $\varliminf\limits_{x\to\infty}\frac{\psi(ax)}{\varphi(ax)} = \varliminf\limits_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \geqslant \frac{a^{\gamma+1}-1}{(\gamma+1)\,a^\gamma\,(a-1)}$. Переходя теперь к пределу при $a\to 1+0$, будем иметь $1 \leqslant \varliminf\limits_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \leqslant$ $\leqslant \varlimsup\limits_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \leqslant 1$, что и требовалось доказать.

3. Переходим теперь к доказательству теоремы. Обозначим через $\chi(x)$ характеристическую функцию интервала (0, 1). По лемме 1 существует функция $p(x)$ вида (7) такая, что

$$\int\limits_0^\infty |\chi(x) - p(x)|\,(1+x^\gamma)\,dx < \varepsilon \qquad (10)$$

(ε произвольно). Справедливо соотношение

$$\frac{1}{\Phi(x)}\int\limits_0^x [\psi(\xi)-\varphi(\xi)]\,d\xi = \frac{1}{\Phi(x)}\int\limits_0^\infty \chi\left(\frac{\xi}{x}\right)[\psi(\xi)-\varphi(\xi)]\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Phi(x)}\sum_{n=1}^N C_n\int\limits_0^\infty k'\left(\frac{\alpha_n\xi}{x}\right)[\psi(\xi)-\varphi(\xi)]\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{\Phi(x)}\int\limits_0^\infty\left[\chi\left(\frac{\xi}{x}\right) - p\left(\frac{\xi}{x}\right)\right][\psi(\xi)-\varphi(\xi)]\,d\xi. \qquad (11)$$

Оценим выражение под знаком суммы. Пользуясь (5) и применяя лемму 2, получим

$$C_n \int_0^\infty k'\left(\frac{\alpha_n \xi}{x}\right)[\psi(\xi)-\varphi(\xi)]\,d\xi = \frac{C_n x}{\alpha_n}\int_0^\infty k\left(\frac{\alpha_n \xi}{x}\right) d\,[\varphi(\xi)-\psi(\xi)] =$$

$$= \frac{C_n x}{\alpha_n}\left[f\left(\frac{x}{\alpha_n}\right) - g\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)\right] = o\left[xf\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)\right] = o\,[\Phi(x)] \quad (x\to\infty).$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части (11) стремится к нулю при $x\to\infty$. Для оценки второго слагаемого заметим, что на основании п. 4) леммы 2 для больших x $\psi(x)\leqslant M\varphi(x)$, где M — константа. Обозначая $r(x)=\chi(x)-p(x)$, будем иметь на основании (4) и (10):

$$\frac{1}{\Phi(x)}\left|\int_0^\infty r\left(\frac{\xi}{x}\right)[\psi(\xi)-\varphi(\xi)]\,d\xi\right| \leqslant \frac{1}{\Phi(x)}\int_0^x \left|r\left(\frac{\xi}{x}\right)\right| |\psi(\xi)-\varphi(\xi)|\,d\xi +$$

$$+\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}\int_x^\infty \left|r\left(\frac{\xi}{x}\right)\right| \frac{\varphi(\xi)}{\varphi(x)}\left|\frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)}-1\right| d\xi \leqslant \frac{(M+1)\,x\varphi(x)}{\Phi(x)}\int_0^1 |r(x)|\,dx +$$

$$+\frac{(M+1)\,x\varphi(x)}{\Phi(x)}\int_1^\infty |r(x)|\,x^\gamma\,dx \leqslant \frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)}(M+1)\,\varepsilon \leqslant (M+1)\,\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{x\to\infty}\left|\frac{1}{\Phi(x)}\int_0^x [\psi(\xi)-\varphi(\xi)]\,d\xi\right| \leqslant (M+1)\,\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то

$$\frac{1}{\Phi(x)}\int_0^x [\psi(\xi)-\varphi(\xi)]\,d\xi \to 0; \quad \int_0^x \psi(\xi)\,d\xi \Big/ \int_0^x \varphi(\xi)\,d\xi \to 1 \quad (x\to\infty).$$

Применяя лемму 3, мы приходим к соотношению $\psi(x)/\varphi(x)\to 1$ $(x\to\infty)$. Теорема доказана.

4. Для большинства «классических» ядер $k(x)$ условие в) легко проверяется. Так, пусть $k(x)=(1+x)^{-m}$, $0<\gamma<m$. Это случай М. В. Келдыша. Уравнение (3) принимает вид

$$\int_0^\infty \frac{s(t)\,dt}{(x+t)^{m+1}} = 0 \quad (0<x<\infty;\ s(x)=O(x^\gamma),\ x\to\infty).$$

Пользуясь тождеством

$$\int_0^\infty \frac{s(t)\,dt}{(x+t)^{m+1}} = \frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_0^\infty e^{-xy}y^m\,dy\int_0^\infty s(t)\,e^{-yt}\,dt$$

и применяя дважды известную теорему для интегралов Лапласа, получим $s(x)\equiv 0$.

Заметим, что условие (4) значительно слабее (1). Например, (4) выполняется, если потребовать выполнения лишь второго неравенства (1).

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
20 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951). [2] М. В. Келдыш, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38, 77 (1951).