Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. А. ДЕЗИН

К ТЕОРЕМАМ ВЛОЖЕНИЯ И ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 XII 1952)

С. Л. Соболевым [1] были введены и изучены классы $W_p^{(l)}(\Omega)$ функций, имеющих в области Ω обобщенные производные порядка l, суммируемые со степенью p.

В настоящей работе мы определяем классы $W_p^{(l)}(\Omega)$ для произвольных нецелых $l \geqslant 0$ и рассматриваем обобщение теорем вложения на этот случай, а также вопросы, связанные с продолжением функции на многообразие большего числа измерений.

Аналогичные задачи, в несколько иной формулировке и более сложными методами, рассматривались С. М. Никольским [2]. Результаты С. М. Никольского являются несколько более сильными, однако, как нам кажется, элементарность метода, примененного нами, дает некоторое преимущество.

Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — суть точки n-мерного евклидова пространства; $f(P)$ — функция, определенная в некоторой конечной области Ω. Положим $f(P) \equiv 0$ при $P \overline{\in} \Omega$. Будем говорить, что $f \in W_p^{(\gamma)}(\Omega)$, если f имеет обобщенные производные порядка $l = [\gamma]$, удовлетворяющие условию:

$$\left\{ \int_\Omega |f^{(l)}(P+Q) - f^{(l)}(P)|^p \, dv_P \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C |Q|^{\gamma - l}, \tag{1}$$

где C не зависит от Q.

Отметим, что имеет место

Теорема 1. *Для того чтобы f имела обобщенные производные первого порядка по всем аргументам, принадлежащие L_p, необходимо и достаточно выполнение условия:*

$$\left\{ \int_\Omega |f(P+Q) - f(P)|^p \, dv_P \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C |Q|.$$

Основным аппаратом настоящей работы являются функции Стеклова

$$f_h(P) = \frac{1}{(2h)^n} \int_{x_1-h}^{x_1+h} \cdots \int_{x_n-h}^{x_n+h} f(Q) \, dv_Q. \tag{2}$$

Лемма 1. *Если $f \in W_p^{(\gamma)}(\Omega)$, то и $f_h \in W_p^{(\gamma)}(\Omega)$, причем константа C, входящая в условие* (1), *не зависит от h.*

Лемма 2. *Если $f \in W_p^{(\gamma)}(\Omega)$, $\gamma \leqslant 1$, то*

$$\left\{\int_\Omega |f_h(P) - f_k(P)|^p dv_P\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C|h-k|^\gamma,$$

где C не зависит от h и k.

Эта лемма является наиболее трудной. Доказательство проводится сначала для случая, когда отношение h/k рационально.

Лемма 3. *В условиях предыдущей леммы при $k = \frac{h}{2}$*

$$|f_h(P) - f_k(P)| \leqslant Ch^{\gamma - \frac{n}{p}},$$

где C не зависит от h.

Теорема 2. *Если $f \in W_p^{(\gamma)}(\Omega)$, $\gamma \leqslant 1$, $\gamma - \frac{n}{p} \leqslant 0$, то $f \in W_q^{(\beta)}$ на любой гиперплоскости $n-s$ измерений, причем β удовлетворяет неравенству*

$$0 \leqslant \beta < \gamma - \frac{n}{p} + \frac{n-s}{q}, \quad q \geqslant p. \tag{3}$$

Наметим доказательство для случая $s = 0$.

Пусть $h_i = \frac{1}{2^i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $f_{h_0} = 0$.

$$\left\{\int_\Omega |f(P+Q) - f(P)|^q dv_P\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\left\{\int_\Omega |f_{h_{i+1}}(P+Q) - f_{h_{i+1}}(P) - f_{h_i}(P+Q) + f_{h_i}(P)|^q dv_P\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\left\{\int_\Omega |\Phi_i|^q dv_P\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\left\{\int_\Omega |\Phi_i|^{q-p} |\Phi_i|^\alpha |\Phi_i|^{p-\alpha} dv_P\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Первый сомножитель оцениваем по лемме 3. К двум другим применяем неравенство Гёльдера с показателями $r = \frac{p}{p-\alpha}$; $r' = \frac{p}{\alpha}$ и результаты лемм 1 и 2 (при соответствующей группировке слагаемых). Потребовав сходимость ряда, получаем условия (3) на β и q.

В случае $s > 0$ будем получать еще множители вида $h_i^{-s/q}$.

Теорема 3. *Если $f \in W_p^{(\gamma)}(\Omega)$, $\gamma \leqslant 1$ и $\gamma - \frac{n}{p} > 0$, то $|f(P+Q) - f(P)| \leqslant C|Q|^\beta$, где $0 \leqslant \beta < \gamma - \frac{n}{p}$.*

Утверждение теоремы следует из леммы 3 и рассмотрений, аналогичных только что проведенным.

Комбинируя полученные результаты с теоремами вложения С. Л. Соболева, нетрудно убедиться в справедливости теорем 2 и 3 и для случая $\gamma > 1$.

Рассмотрим обратную задачу. Под продолжением функции $f \in W_p^{(\gamma)}(\Omega)$ в область $\tilde{\Omega}$ $n-1$-мерного пространства мы подразумеваем отыскание функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, определенной в $\tilde{\Omega}$ и удовлетворяющей условию:

$$\| u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_{W_p^{(l)}(\Omega)} \to 0 \text{ при } t \to 0. \tag{4}$$

При этом представляют интерес продолжения, имеющие наибольшую «гладкость» в $\tilde{\Omega}$. Из теоремы 2 следует, что, в лучшем случае, мы можем ожидать $u \in W_p^{\left(\gamma+\frac{1}{p}\right)}(\tilde{\Omega})$.

Теорема 4. *Пусть область Ω лежит на гиперплоскости $t=0$ $n+1$-мерного пространства и в области $\tilde{\Omega}$ координаты удовлетворяют условию: $x_i \in \Omega$ $(i=1, 2, \ldots, n)$; $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, определяемая формулой:*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{(2t)^n} \int\limits_{x_1-t}^{x_1+t} \cdots \int\limits_{x_n-t}^{x_n+t} f(Q)\, dv_Q,$$

где $f \in W_p^{(\gamma)}(\Omega)$, $\gamma \leqslant 1$, удовлетворяет условию (4) и при $\gamma + \frac{1}{p} \neq 1$ принадлежит $W_p^{\left(\gamma+\frac{1}{p}\right)}(\tilde{\Omega})$, т. е. дает наилучшее продолжение f в область $\tilde{\Omega}$.

При $\gamma + \frac{1}{p} = 1$ функция u удовлетворяет условию:

$$\left\{\int\limits_{\tilde{\Omega}} |u(\tilde{P}+\tilde{Q}) - u(\tilde{P})|^p\, dv_{\tilde{P}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C\,|\tilde{Q}|\,|\ln|\tilde{Q}||^{\frac{1}{p}},$$

где $\tilde{P}$, $\tilde{Q}, \ldots$ — точки $n+1$-мерного евклидова пространства.

Наметим ход доказательства.

$$\text{Пусть } u_{(h)}(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{(2t)^n} \int\limits_{x_1-t}^{x_1+t} \cdots \int\limits_{x_n-t}^{x_n+t} f_h(Q)\, dv_Q.$$

При $t \geqslant k > 0$ $u_{(h)}$ имеет непрерывные производные по всем аргументам. При $\gamma + \frac{1}{p} > 1$ и $h \to 0$ эти производные сильно сходятся по норме $L_p(\tilde{\Omega})$ к функциям, получаемым дифференцированием u по x_i или t, соответственно. Отсюда без труда устанавливается, что последние являются обобщенными производными u.

Проверка выполнения условия (1) для u или ее обобщенных производных достигается непосредственным рассмотрением норм сдвигов по x_i:

$$\| u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n, t) - u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, t) \|_{L_p(\tilde{\Omega})}$$

и по t для функции u или ее обобщенной производной, соответственно. При этом используются леммы 1 и 2.

Если многообразие Ω не является плоским, то теорема применима при условии существования координатного преобразования, вносящего конечное искажение расстояний и преобразующего его в плоское.

Для $\gamma > 1$ вопрос сводится к продолжению соответствующих обобщенных производных.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность акад. С. Л. Соболеву за постановку задачи и помощь, оказанную при ее решении.

Поступило
8 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. [2] С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 38, 244 (1951).