Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 2

ФИЗИКА

В. Я. ХАРАНЕН

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 13 XI 1952)

Рассмотрим в лучевом приближении задачу о распространении звука в среде со случайными флуктуациями коэффициента преломления при условии малости отклонений коэффициента преломления от единицы*. Коэффициент преломления n будем считать непрерывной стационарной случайной функцией от координат, предполагая независимость статистических характеристик среды от направления (макроскопическая изотропность). Нас будут интересовать статистические характеристики лучей, распространяющихся в таких средах, усредненные по совокупности. Усреднение будем обозначать чертой.

Пусть в некоторый начальный момент времени из какой-либо точки выходит луч; рассмотрим какую-нибудь фиксированную плоскость P, касательную к лучу в его начальной точке. При распространении луч будет преломляться; обозначим случайный угол, который луч будет составлять с плоскостью P после прохождения пути s, через φ.

Для любого s

$$\overline{\varphi} = 0, \tag{1}$$

так как равновероятны положительные и отрицательные значения φ.

Рассмотрим зависимость $\overline{\varphi^2}$ от пути s:

$$\overline{\varphi^2} = \overline{\left\{\int_0^s \frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\right\}^2} = \int_0^s\int_0^s \overline{\frac{d\varphi(s_1)}{ds_1}\,\frac{d\varphi(s_2)}{ds_2}}\,ds_1\,ds_2 =$$

$$= \overline{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}\int_0^s\int_0^s R(s_2 - s_1)\,ds_1 ds_2 = 2s\,\overline{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}\int_0^\infty R(\rho)\,d\rho, \tag{2}$$

где $R(s_2 - s_1) = R(\rho)$ — коэффициент автокорреляции [1] функции $d\varphi/ds$; последнее равенство справедливо для достаточно больших s [2]. Выразим $\overline{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}$ через характеристики среды, принимая во внимание статистическую независимость φ и $d\varphi/ds$ и равновероятность любых направлений градиента показателя преломления. При встрече луча

* Вопрос о пределах применимости лучевой картины требует отдельного рассмотрения, которое здесь не проводится.

с градиентом показателя преломления приращение волнового вектора направлено по направлению этого градиента и равно по модулю $\frac{|\operatorname{grad} n|}{n} k\, ds$, где k — модуль волнового вектора. Так как любые направления градиентов показателя преломления равновероятны, плотность вероятности приращений волновых векторов будет обладать сферической симметрией. Чтобы получить $\overline{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}$, нужно усреднить по всем направлениям квадраты расстояний точек, лежащих на поверхности сферы радиуса $\frac{|\operatorname{grad} n|}{n}$, от произвольной плоскости, проходящей через центр сферы. Результат необходимо усреднить еще по всем возможным модулям градиентов показателя преломления. Выполнив указанные усреднения, получим $\overline{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} = \frac{\overline{(\operatorname{grad} n)^2}}{3n^2}$; таким образом:

$$\overline{\varphi^2} = 2s\, \frac{\overline{(\operatorname{grad} n)^2}}{3n^2} \int_0^\infty R(\rho)\, d\rho. \tag{3}$$

Найдем вероятность $w(s, \varphi \mid 0, 0)$ того, что луч, имевший при $s = 0$ угол $\varphi = 0$, будет после прохождения в среде пути s составлять с плоскостью P угол, лежащий в интервале $(\varphi, \varphi + d\varphi)$. Будем считать, что элементарные отрезки пути Δs достаточно велики, чтобы приращения угла $\Delta\varphi$ на любых неперекрывающихся отрезках были статистически независимыми. Тогда процесс изменения угла φ будет являться случайным процессом типа цепи Маркова и плотность вероятности w будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial s} - D\, \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{4}$$

где

$$D = \frac{\overline{(\operatorname{grad} n)^2}}{3n^2} \int_0^\infty R(\rho)\, d\rho. \tag{5}$$

Решением (4), удовлетворяющим условиям нормировки и неотрицательности, а также начальному условию $w|_{s=0} = \delta(\varphi)$, где δ — дельта-функция, является следующее гауссово распределение:

$$w(\varphi, s \mid 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D s}}\, e^{-\varphi^2/4Ds}. \tag{6}$$

После прохождения в среде пути s луч удалится от плоскости P на расстояние z, равное:

$$z = \int_0^s \sin\varphi(s)\, ds. \tag{7}$$

Очевидно, $\overline{z} = 0$. Найдем $\overline{z^2}$:

$$\overline{z^2} = \int_0^s \int_0^s \overline{\sin\varphi(s_1) \sin\varphi(s_2)}\, ds_1\, ds_2 =$$

$$= \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} \overline{\sin\varphi(s_1) \sin\varphi(s_2)}\, ds_2 + \int_0^s ds_1 \int_{s_1}^s \overline{\sin\varphi(s_1) \sin\varphi(s_2)}\, ds_2. \tag{8}$$

Рассмотрим второе слагаемое, в которое удобно вместо $\varphi(s_2)$ ввести угол $\eta(s_2 - s_1)$, определяемый соотношением: $\eta \equiv \varphi(s_2) - \varphi(s_1)$. Тогда, вследствие равновероятности положительных и отрицательных η и статистической независимости η и $\varphi(s_1)$, второе слагаемое в (8) оказывается равным:

$$\int_0^{s_1} ds_1 \int_{s_1}^{s} \overline{\sin^2\varphi(s_1)}\cdot\overline{\cos\eta(s_2-s_1)}\,ds_2 = \frac{1}{D}\left\{s - \frac{5}{4D} - \frac{1}{12D}e^{-4Ds} + \frac{4}{3D}e^{-Ds}\right\}, \quad (9)$$

где для вычисления $\overline{\sin^2\varphi(s_1)}$ и $\overline{\cos\eta(s_2-s_1)}$ использована формула (6). Первое слагаемое в (8), вычисленное подобным же образом дает в точности такую же величину. Для $s \ll 1/D$ полученное для $\overline{z^2}$ выражение можно разложить в ряд по степеням Ds и ограничиться первым неисчезающим членом ряда

$$\overline{z^2} = 8Ds^3. \quad (10)$$

Полученный результат (10) дает возможность оценить вероятность того, что луч, выпущенный горизонтально в плоско-параллельном слое заданной толщины, будет находиться в этом слое после прохождения пути s. Такого рода оценка может оказаться полезной, например, при исследовании распространения звука в поверхностном слое моря. Для данных [1] о неоднородностях верхнего слоя моря получаем, согласно (5): $D \approx 5\cdot 10^{-6}$ км$^{-1}$, в соответствии с чем находим для $s = 1$ км $\sqrt{\overline{z^2}} \approx 6$ м.

Дадим теперь подстановку ряда задач о распространении звуковых лучей в плоско-параллельном слое при условии, что лучи, достигнув плоскостей, ограничивающих слой, с необходимостью покидают его. Расстояние между лучом и нижней «поглощающей плоскостью» обозначим через z; угол, составляемый лучом с этой плоскостью, положительные значения которого отсчитываются по направлению от нижней границы слоя к верхней, обозначим через φ.

а) Рассмотрим вероятность $w(z, \varphi, s \mid z_0, \varphi_0, 0)\,ds\,d\varphi$ того, что луч, при $s = 0$ находившийся на расстоянии z_0 от нижней «поглощающей плоскости» и составлявший угол φ_0 с ней, после прохождения пути s будет иметь z и φ, соответственно, в интервалах: $(z, z+dz)$ и $(\varphi, \varphi+d\varphi)$, ни разу не достигнув на протяжении пути s поглощающих плоскостей. Элементарные отрезки пути Δs считаем достаточно большими, чтобы процесс изменения z и φ можно было считать случайным процессом типа цепи Маркова. Тогда плотность вероятности $w(z, \varphi, s \mid z_0, \varphi_0, 0)$ будет удовлетворять второму уравнению Колмогорова для случая, когда состояние системы характеризуется двумя параметрами. Принимая во внимание (1), (2) и (6), соответствующее уравнение (см. [3]) будет иметь вид:

$$\frac{dw}{\partial s} = -\sin\varphi\,\frac{\partial w}{\partial z} + D\,\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}. \quad (11)$$

Искомое решение уравнения (11) кроме начального условия $w|_{s=0} = \delta(z-z_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)$ и условия неотрицательности для z, лежащих внутри слоя, должно удовлетворять граничным условиям, имеющим место на «поглощающих стенках»: $w(z=0, \varphi \leqslant 0, s \mid z_0, \varphi_0, 0) = w(z=h, \varphi \geqslant 0, s \mid z_0, \varphi_0, 0) = 0$, где h — толщина слоя.

б) Рассмотрим вероятность $W(z, \varphi, s)$ того, что луч, находившийся при $s = 0$ на расстоянии z от нижней «поглощающей плоскости» и имевший угол φ с ней, при прохождении пути s хотя бы раз достигнет «поглощающих границ». Можно показать [3], что эта вероятность удовлетворяет уравнению, в правую часть которого входит оператор, сопряженный оператору, входящему в правую часть (11):

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \sin\varphi \frac{\partial W}{\partial s} + D \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}. \qquad (12)$$

Нужно найти решение уравнения (12), удовлетворяющее, кроме условия неотрицательности, граничным условиям $W(z=0, \varphi \leqslant 0, s) = W(z=h, \varphi \geqslant 0, s) = 1$ и начальному условию: $W|_{s=0} = 0$ для всех z и φ, соответствующих лучам, находящимся в начальный момент внутри слоя.

в) Обозначим через $T(z, \varphi)$ средний по совокупности путь, пройденный лучом до первого достижения «поглощающих границ», если в начальный момент луч находился на расстоянии z от нижней «поглощающей плоскости» и составлял с ней угол φ. Для нахождения $T(z, \varphi)$ нужно решить уравнение:

$$\sin\varphi \frac{\partial T}{\partial z} + D \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = -1, \qquad (13)$$

которое получается [3] из уравнения (12), если учесть, что, согласно определению, величина $T(z, \varphi)$ равна $\int\limits_0^\infty s \frac{\partial W}{\partial s} ds$, где W — решение предыдущей задачи, при граничных условиях $T(z=0, \varphi \leqslant 0) = T(z=h, \varphi \geqslant 0) = 0$.

Поставленные задачи представляют интерес, например, при исследовании распространения звуковых лучей в поверхностном слое моря при наличии слоя скачка [4]. Для звуковых лучей верхняя граница слоя скачка представляет «поглощающую плоскость», ибо лучи, достигнув ее, преломляются и уходят в глубину. Присутствие поверхности моря, которую в некотором приближении можно считать зеркально отражающей, равноценно присутствию второй «поглощающей плоскости», расположенной симметрично первой относительно поверхности моря.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность Л. М. Бреховских и М. А. Исаковичу за внимание к данной работе.

Поступило
20 VIII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Liebermann, JASA, 23, No. 5 (1951). [2] P. G. Bergmann, Phys. Rev., 70, 486 (1946). [3] М. А. Леонтович, Статистическая физика, 1944. [4] В. А. Красильников, Звуковые волны в воздухе, воде и твердых телах, 1951.