Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 2

ФИЗИКА

Д. ИВАНЕНКО, Д. КУРДГЕЛАИДЗЕ и С. ЛАРИН

ЗАМЕЧАНИЯ К НЕЛИНЕЙНОЙ МЕЗОДИНАМИКЕ

(Представлено академиком Д. В. Скобельцыным 20 X 1952)

Как известно, возможность взаимного превращения частиц приводит к эффективной нелинейности в уравнениях соответствующих полей.

Нелинейные уравнения могут быть записаны в форме соотношений феноменологической теории поля при помощи квази-диэлектрических проницаемостей, которые могут характеризовать как вакуум, так и реальную среду. Например, нелинейное уравнение скалярного вещественного мезонного поля в присутствии источников имеет вид ([1])

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\right) - k_0^2 \varepsilon_2 \Phi = -4\pi g\rho, \tag{1}$$

где ε_1 и ε_2 — инвариантные функции, например, вида

$$\varepsilon = 1 + a\Phi^2 + b\Phi_\nu^2, \tag{2}$$

как можно показать, исходя из простейшего нелинейного лагранжиана.

В случае, когда достаточно учесть ε_2, при примерно постоянном Φ в статическом случае имеем

$$\Delta\Phi - k_0^2\Phi - \Lambda\Phi^3 = -4\pi g\rho. \tag{3}$$

Таким образом, мы приходим к нелинейному добавку вида, указанного нами ранее ([2]) для уравнений релятивистской квантовой теории поля*.

Отметим, что в случае примерно постоянных и малых Φ уравнению (1) можно придать форму:

$$\Delta\Phi - k_0^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\Phi = -4\pi\frac{g}{\varepsilon_1}\rho \approx -4\pi\rho g\,(1 - \alpha^2\Phi^2 + \ldots), \tag{4}$$

что наглядно показывает известную эквивалентность нелинейной связи ([3]) наличию нелинейностей в уравнении поля.

Трудный вопрос об определении параметра Λ может быть решен, например, путем рассмотрения нелинейного эффекта типа рассеяния мезонов на мезонах через нуклеоны, аналогично рассеянию света на свете через электроны — позитроны ([4]) или через заряженные мезоны. Для этой цели матричный элемент указанного процесса 4-го порядка, обязанного энергии взаимодействия нуклеонов с мезонным полем вида $U = g\Phi$, следует сравнить с матричным элементом того же процесса, обязанного специфическому нелинейному взаимодействию мезонов, которому соответствует наличие в лагранжиане членов

$$L' = \frac{1}{4\pi}\Lambda\Phi^4 + \beta\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Phi\right)^4. \tag{5}$$

---

* Тем самым мы приходим к нелинейной добавке к массе частиц, определяемой в основном членом $\Lambda\Phi^3$.

Отсюда получаем оценку:

$$\Lambda \cong \frac{g^4}{(\hbar c)^3}(f_0 + f_4), \tag{6}$$

где $f_0 = \int (dp) / (M^2 c^2 + p^2)^{3/2}$, f_4 — конечная величина.

Обратим теперь внимание на правую часть уравнения нелинейного поля (3), определяемую плотностью нуклеонных источников ρ. В случае системы нуклеонов представляется более последовательным уточнить обычное эмпирическое соотношение $\rho = \text{const}$, взяв за основу, например, форму связи, получающуюся по методу Томаса — Ферми, которая в релятивистском случае имеет вид [5]

$$\rho = \frac{1}{3\pi^2}\frac{g^3}{(\hbar c)^3}\left(\frac{2Mc^2}{g}\right)^{3/2}\Phi^{3/2}\left[1 + \frac{g\Phi}{2Mc^2}\right]^{3/2}. \tag{7}$$

В этом случае вместо (3) получим

$$\Delta\Phi - k_0^2\Phi - \Lambda\Phi^3 = -\frac{4}{3\pi}\frac{g^4}{(\hbar c)^3}\left(\frac{2Mc^2}{g}\right)^{3/2}\Phi^{3/2}\left[1 + \frac{g\Phi}{2Mc^2}\right]^{3/2}. \tag{8}$$

В случае выполнимости ультрарелятивистского приближения имеем

$$\Delta\Phi - k_0^2\Phi - \Lambda\Phi^3 = -4\pi g\rho = -\frac{4}{3\pi}\frac{g^4}{(\hbar c)^3}\Phi^3. \tag{9}$$

Если предположить, что Φ — медленно меняющаяся функция, то в условиях сильной нелинейности ($k_0^2\Phi \ll \Lambda\Phi^3$) приходим к любопытному результату о возможности определения нелинейного параметра Λ. В самом деле, имеем

$$-\Lambda\Phi^3 = -\frac{4}{3\pi}\frac{g^4}{(\hbar c)^3}\Phi^3.$$

Отсюда

$$\Lambda = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{g^4}{\hbar^3 c^3}\right). \tag{10}$$

Этот вид Λ согласуется с приведенной выше оценкой при помощи эффектов 4-го порядка. Однако для реальных нуклеарных систем (10) соответствует слишком малому значению ввиду того, что ультрарелятивистская формула является грубым приближением.

Беря предельный нерелятивистский случай, получим

$$\Lambda\Phi^3 = 4\pi g\rho = \frac{4}{3\pi}\frac{g^4}{(\hbar c)^3}\left(\frac{2Mc^2}{g}\right)^{3/2}\Phi^{3/2}. \tag{11}$$

Отсюда при известном Λ можно найти в качестве нулевого приближения

$$\Phi_0 = \left(\frac{4}{3\pi\Lambda}\frac{g^4}{(\hbar c)^3}\right)^{2/3}\frac{2Mc^2}{g}. \tag{12}$$

Обратно, задавая Λ в виде

$$\Lambda = a\frac{g^4}{(\hbar c)^3} \tag{13}$$

и взяв эмпирическое значение $g\Phi_0 \cong 30$ Мэв, получим $a \sim 2 \cdot 10^2$. Отметим, что для устойчивости нуклеарных систем необходимо, чтобы при $\rho = \text{const} \cdot \Phi^n$ $n > 3/2$ [6].

Для анализа нелинейной мезодинамики интересно отметить, что в случае медленно меняющихся полей уравнение поля вида

$$\Phi'' + b\Phi^3 + c\Phi^2 + a\Phi + d = 0 \tag{14}$$

имеет решения в эллиптических функциях, например,

$$\Phi = A + B \operatorname{cn}(\omega r + \gamma), \tag{15}$$

где ω^2 и коэффициенты A, B, γ определяются через параметры уравнения и начальные условия. Из подобного решения получается, в частности, тривиальное решение для случая $c = d = 0$, когда $\omega r + \gamma = (2n + 1) K$ (K — полный эллиптический интеграл 1-го рода, n — целое)

$$\Phi_0 = \begin{cases} 0 \\ \pm \sqrt{-a/b}. \end{cases} \tag{16}$$

В важном для нас случае уравнения (9), когда $c = d = 0$, $b < 0$, $a < 0$ при слабой нелинейности, иначе говоря, на больших расстояниях, из (15) при некоторых ограничениях, наложенных на параметры решения, находим решение

$$\Phi = \sqrt{\frac{2k_0^2}{\Lambda}} \left[\sinh(k_0 r + C_1)\right]^{-1} \quad (C_1 \text{ — постоянная}) \tag{17}$$

при $b = -\Lambda$, $a = -k_0^2$.

В случае уравнения $\Phi'' - \Lambda\Phi^3 = 0$, соответствующего сильной нелинейности, получаем в качестве решения, пригодного на малых расстояниях,

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \frac{1}{r + \text{const}}. \tag{18}$$

Анализ полученных решений, а также роли ε наглядно показывает ослабление взаимодействий, переносимых нелинейным полем на малых расстояниях, повидимому, требуемое с определенностью разнообразными эмпирическими соображениями.

Эллиптические решения соответствуют наличию нового параметра, которому можно придать размерность длины. Напомним, что потенциал в нелинейной теории Борна — Инфельда также выражался эллиптическим интегралом и нелинейное уравнение электродинамики Ми, которое по существу может быть использовано лишь в мезодинамике, тоже имело в качестве решений эллиптические функции.

В заключение выражаем благодарность Н. Н. Колесникову за ценные замечания и участие в дискуссии.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Иваненко, А. Бродский, ДАН, **84**, 682 (1952). [2] Д. Иваненко, Sow. Phys., **13**, 141 (1938). [3] Д. Иваненко, В. Лебедев, ДАН, **80**, 357 (1951). [4] H. Euler, Ann. d. Phys., **26**, 398 (1936). [5] П. Гомбаш, Статистическая теория атома и ее применения, М., 1951. [6] L. Schiff, Phys. Rev., **84**, 1 (1951).