

Л. М. КАЧАНОВ

**УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ
СЖАТО-СКРУЧЕННОГО ВАЛА**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 26 XI 1952)

В настоящей работе изучается устойчивость круглого вала, сжато-скрученного за пределом упругости. Задача об устойчивости идеально упругого вала подробно рассмотрена в ряде работ ((1-3) и др.).

§ 1. Круглый вал диаметра $2a$ испытывает действие скручивающего момента M и осевого давления P . Примем, для простоты, что материал несжимаем и будем пренебрегать упрочнением. Пусть r, φ, z — цилиндрические координаты; $\rho = r/a$ — безразмерный радиус; l — длина вала; b — радиус упругой зоны, $b/a = \tau_0$; G — модуль сдвига; σ_s — предел текучести при растяжении ($\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$). В упругой области ($\rho \leq \tau_0$) компоненты напряжения ($E = 3G$)

$$\sigma_z = 3G\varepsilon, \quad \tau_{\varphi z} = G a \rho \theta, \quad (1)$$

где ε — относительное удлинение по оси z ; θ — угол кручения на единицу длины ($a\theta/\sqrt{3}\varepsilon \equiv \kappa$). В пластической области ($\rho \geq \tau_0$) имеем

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2 \rho^2}}, \quad \tau = \frac{\kappa \rho}{\sqrt{1 + \kappa^2 \rho^2}}, \quad (2)$$

где положено $\sigma_z = \sigma_s \sigma$, $\tau_{\varphi z} = \tau_s \tau$. Пусть при тех же внешних силах P, M конфигурация стержня бесконечно мало отличается от исходной прямой. Для нового состояния имеем дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{d^2 L_x}{ds^2} + M \frac{dq}{ds} + Pp = 0, \quad \frac{d^2 L_y}{ds^2} - M \frac{dp}{ds} + Pq = 0, \quad (3)$$

где x, y, z — подвижная система координат; p — кривизна, q — кручение стержня; L_x, L_y — изгибающие моменты. Заметим, что

$$p = -\frac{d^2 v}{ds^2}, \quad q = \frac{d^2 u}{ds^2}, \quad (4)$$

где u, v — компоненты смещения.

Для упругого стержня справедливы соотношения Кирхгофа

$$L_x = A_0 p, \quad L_y = B_0 q, \quad (5)$$

где A_0, B_0 — жесткости на изгиб и кручение. Тогда уравнения (3), (4),

(5) при заданных граничных условиях полностью решают задачу. При пластических деформациях соотношения (5) неприменимы.

§ 2. Следуя общей схеме построения теории тонких стержней, полагаем, что при выпучивании вал испытывает бесконечно малые изгиб и скручивание:

$$\delta \varepsilon_z = \varepsilon_0 - qx + py, \quad \delta \gamma_{xz} = -\omega y, \quad \delta \gamma_{yz} = \omega x, \quad (6)$$

где ε_0 , ω — бесконечно малые дополнительные осевое удлинение и кручение. Исходя из уравнений теории пластического течения (см., например, (5)), находим приращения напряжений:

$$\begin{aligned} \delta \sigma_z &= E \delta \varepsilon_z - \frac{2}{3} E \delta \gamma_{\sigma z}, \\ \delta \tau_{xz} &= -G \omega y - 2G \delta \gamma_{\tau_{xz}}, \quad \delta \tau_{yz} = G \omega x - 2G \delta \gamma_{\tau_{yz}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Мера приращения пластической работы $\delta \gamma$ определяется по условию пластичности Мизеса. Вариации $\delta \sigma_z$, $\delta \tau_{xz}$, $\delta \tau_{yz}$ равны нулю. Приращения изгибающих моментов вычисляются по формулам

$$L_x = \iint y \delta \sigma_z ds, \quad L_y = - \iint x \delta \sigma_z ds, \quad (8)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь S поперечного сечения. Из уравнений равновесия вытекает, что приращения скручивающего момента и осевого усилия должны равняться нулю:

$$L'_z = \iint_S (x \delta \tau_{yz} - y \delta \tau_{xz}) ds = 0, \quad (9)$$

$$V'_z = \iint_S \delta \sigma_z ds = 0. \quad (10)$$

Область S состоит из упругого ядра S_0 , области разгрузки S_1 и области нагружения S_2 . В S_2 условие пластичности Мизеса после отбрасывания малых второго порядка получает вид

$$\sigma_z \delta \sigma_z + 3\tau_{xz} \delta \tau_{xz} + 3\tau_{yz} \delta \tau_{yz} = 0, \quad (11)$$

или, после исключения вариаций напряжений:

$$\sigma_z \delta \varepsilon_z + \omega (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) - 2\tau_s^2 \delta \gamma = 0. \quad (12)$$

Внося в (9), (10) вариации напряжений и $\delta \gamma$ согласно (7), (12) и вводя новую систему координат x' , y' :

$$x = x' \cos \psi - y' \sin \psi,$$

$$y = y' \cos \psi + x' \sin \psi, \quad \operatorname{tg} \psi = -p/q,$$

получаем

$$\frac{\Omega}{V^3} = \iint \tau r (x_0 - x') ds \left(I - \iint \tau^2 r^2 ds \right)^{-1}, \quad (13)$$

$$x_0 S = \iint \sigma^2 (x_0 - x') ds + \frac{\Omega}{V^3} \iint \tau r ds, \quad (14)$$

где обозначено $x_0 = -\varepsilon_0/q'$, $q' = q/\cos \psi$, $\Omega = \omega/q'$, $S = \pi a^2$, $I = \pi a^4/2$.

Интегрирование распространяется на область S_2 , так как в S_1 $\delta \gamma = 0$. В S_2 $d\gamma = \frac{dA''}{2\tau_s^2} > 0$, где элементарная работа пластической деформации (T , Γ — интенсивности касательных напряжений и деформаций

сдвига) $dA'' = T d\Gamma - dV_e$. Упругая энергия $V_e = \frac{1}{2G} T^2$, следовательно, в S_2 $dV_e = 0$. Используя (6), получаем

$$dA'' = \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} = \sigma_z \delta \varepsilon_z + \omega r \tau_{\varphi z}.$$

Можно доказать (рассуждением «от противного»), что линия раздела зон разгрузки и нагружения пересекает область S . На линии раздела $dA'' = 0$, отсюда получаем уравнение

$$x_0 - x' = -\frac{\sqrt{3}}{a} \kappa \Omega (x'^2 + y'^2),$$

представляющее семейство окружностей, симметричных относительно x' , зависящее от параметров x_0, Ω . Последние определяются из системы уравнений (13), (14), в которой κ, η считаются заданными.

Переходя к вычислению моментов L_x, L_y , замечаем, что в системе x', y' $L_{x'} = 0, p' = 0$, поэтому

$$L_x = A_p, \quad L_y = A_q, \quad (15)$$

где

$$A = \frac{L_{y'}}{q'}, \quad (16)$$

$$L_{y'} = - \iint_S x' \delta \sigma_z ds = q' (A_0 + A') \equiv q' A;$$

здесь

$$\frac{1}{E} A' = \iint_{S_2} \sigma^2 x' (x_0 - x') ds + \frac{\Omega}{\sqrt{3}} \iint_{S_2} \sigma \tau x' r ds. \quad (17)$$

Следовательно, «жесткость» $A = A(P, M)$ не зависит от p, q , и задача об устойчивости сжато-скрученного вала за пределом упругости приводится к тем же линейным краевым задачам, что и для упругого вала, нужно лишь вместо A_0 взять A . В случае упругого вала $A' = 0, A = A_0$.

§ 3. Если $M = 0$, то упругое ядро отсутствует и $A = 0$; это соответствует известному результату Кармана о том, что сжатый стержень на площадке текучести теряет устойчивость при любой длине.

Рассмотрим случай $P = 0$. Так как $S_2 < S, \tau^2 \leq 1$, то из (13) следует, что $\omega = 0$, а из (12), что $\delta \gamma = 0$. Тогда во всем сечении $\delta \sigma_z = E \delta \varepsilon_z$. По условию $V'_z = 0$, линия раздела проходит через начало координат. Легко видеть, что в рассматриваемом случае

$$L_x = A_0 p, \quad L_y = A_0 q, \quad (18)$$

т. е. скручиваемый стержень за пределом упругости характеризуется той же устойчивостью, что и в пределах упругости.

§ 4. Рассмотрим случай $\tau^2 \ll 1$. При этом $|\tau|$ относительно мало по сравнению с $|\sigma|$. По теореме о среднем из (13) получаем

$$\omega \approx \frac{\sqrt{3}}{l} \overline{\sigma \tau r} \delta \varepsilon_z S_2, \quad (19)$$

где черточка означает некоторое промежуточное значение.

Используя (19), из уравнения $dA'' = 0$ находим, что на линии раздела $\delta \varepsilon_z = 0$, т. е. линия раздела — прямая. Точно так же $\delta \gamma \approx \frac{\sqrt{3}}{2\tau_s} \sigma \delta \varepsilon_z$, и из (7) получаем $\delta \sigma_z = E \delta \varepsilon_z (1 - \sigma^2)$. Внутри круглой скобки стоит величина, значительно меньшая единицы; в упругой зоне и зоне разгрузки $\delta \sigma_z = E \delta \varepsilon_z$. Следовательно, мы вправе положить, что в пластической области в зоне нагружения $\delta \sigma_z = 0$.

Положение линии раздела определяется параметром x_0 , который находится из уравнения (10). Необходимо различать случаи $x_0 \geq b$, $x_0 \leq b$. Положим

$$\frac{x_0}{a} = \cos \chi, \quad \eta = \cos \xi, \quad \frac{\cos \chi}{\cos \xi} = \cos \chi_1 \quad (\chi > \xi).$$

Согласно (10) получаем

$$\left(1 - \frac{1}{3} \sin^2 \chi\right) \operatorname{tg} \chi = \chi + \pi \eta^2 \quad (\chi \leq \xi);$$

$$\frac{2}{3} (\sin^3 \chi - \eta^3 \sin^3 \chi_1) \frac{1}{\cos \chi} + \frac{1}{2} (\sin 2\chi - \eta^2 \sin 2\chi_1) = \pi \eta^2 + \chi - \eta^2 \chi_1 \quad (\chi \geq \xi).$$

Анализируя левые и правые части этих уравнений как функции χ при фиксированном η , можно показать, что корень χ монотонно возрастает вместе с возрастанием η . Если упругое ядро невелико ($\eta < 0,398$), то линия раздела не пересекает ядра. Линия раздела касается ядра при $\eta = 0,398$. Таким образом, первое уравнение относится к случаю развитой пластичности. По мере возрастания пластической зоны линия раздела отодвигается к контуру стержня.

Согласно (16), (17) находим

$$A^*(\eta) \equiv \frac{A}{A_0} = \begin{cases} \eta^4 + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{8}{3} \sin^3 \chi \cos \chi + \left(\chi - \frac{1}{4} \sin 4\chi \right) \right], & \eta \leq \eta_0; \\ \eta^4 + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{8}{3} \sin^3 \chi \cos \chi \left(1 - \eta^3 \frac{\sin^3 \chi_1}{\sin^3 \chi} \right) + \right. \\ \left. + \left(\chi - \frac{1}{4} \sin 4\chi \right) \left(1 - \eta^4 \frac{\chi_1 - \frac{1}{4} \sin 4\chi_1}{\chi - \frac{1}{4} \sin 4\chi} \right) \right], & \eta \geq \eta_0 \end{cases}$$

Заметим, что $A^*(\eta)$ — монотонно возрастающая функция η , причем $A^*(0) = 0$, $A^*(1) = 1$, $\frac{d^2}{d\eta^2} A^* > 0$.

§ 5. В заключение рассмотрим вопрос об устойчивости тонкостенной сжато-скрученной трубы. Обозначим через c средний радиус трубы, через h — толщину стенки ($h \ll c$). До потери устойчивости труба находится в пластическом состоянии, причем напряжения $\sigma \approx \text{const}$, $\tau \approx \text{const}$ удовлетворяют условию пластичности $\sigma^2 + \tau^2 = 1$. Если воспользоваться предыдущими результатами, упрощая их при помощи условия $h \ll c$, получим, что линия раздела (в данном случае прямая) касательна к окружности $r = c$. Вычисляя по (16) «жесткость» A , находим

$$A = \pi a^3 h \tau^2.$$

Это соотношение остается справедливым и при чистом кручении, когда $\tau^2 = 1$.

Поступило
2 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Greenhill, Proc. Inst. Mech. Eng., London (1883). ² R. Grammel, Z. ang. Math. u. Mech., 3, 262 (1923). ³ E. L. Nicolai, ibid., 6, 30 (1926). ⁴ А. Надаи, Пластичность, 1936. ⁵ Shepherd, Proc. Inst. Mech. Eng. Appl. Mech., 159, No. 39 (1948).