Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. И. ФЕТ

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ ЗАМКНУТЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ НА МНОГООБРАЗИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 XI 1952)

В этой заметке мы даем точную оценку снизу длины (mod 2) [10] пространства замкнутых неориентированных кривых на замкнутых многообразиях, удовлетворяющих следующему условию:

А. Первая ненулевая группа Бетти многообразия R состоит не только из элементов нечетного порядка.

Теорема 1. *Длина пространства замкнутых кривых на замкнутом односвязном четырежды непрерывно дифференцируемом многообразии R, удовлетворяющем условию* А, *не меньше* 3; *число* 3 *в этой теореме не может быть заменено бо́льшим. Пусть m — первое натуральное число такое, что группа Бетти $\Delta^m(R)$ нетривиальна. Тогда в пространстве замкнутых кривых Σ на многообразии R существует такой ∇-цикл Z^{m-1}, что $(Z^{m-1})^3$ не гомологичен нулю на R.*

Категория Σ не меньше 3.

Из теоремы 1 легко вытекает:

Теорема 2. *Алгебраическое число замкнутых экстремалей положительно регулярной вариационной задачи на многообразии R не меньше* 3.

Именно, если $\Delta^m(R)$ — первая нетривиальная группа Бетти многообразия R, то либо существуют замкнутые экстремали g_1, g_2 и g_3, индексы которых равны, соответственно, $(m-1)$, $2(m-1)$, $3(m-1)$, а длины $c_1 < c_2 < c_3$; либо существует континуум замкнутых экстремалей равной длины.

Заметим, что из теоремы 2 не следует еще, что на R имеется не менее трех геометрически различных замкнутых экстремалей; в самом деле, не исключена возможность, что g_2, соответственно g_3, есть дважды, соответственно трижды, пройденная экстремаль g_1. В этом случае теорема 2 становится высказыванием об индексах g_1 и кратных ей экстремалей.

Таким образом, теорема 2 есть предложение „типа Морса“ [5]. Доказательство использует метод предыдущих работ [4, 8], а также гомологии в Σ*.

Рассмотрим, подобно [8] (гл. III), существенное отображение f сферы S^m в R. Как известно, в условиях теоремы 1 гомотопическая группа

* Во время подготовки к печати этой заметки автору стала известна работа Серра [6], где рассмотрена задача с закрепленными концами. Мы не пытались пока применить методы Серра к периодической задаче, что представило бы большой интерес.

$\pi^m(R)$ изоморфна $\Delta^m(R)$, так что каждый не гомотопный нулю сфероид из $\pi^m(R)$ определяет не гомологичный нулю Δ-цикл z_m на R. Каждый целочисленный Δ-цикл можно редуцировать по модулю 2 ([1], гл. IX), и, в наших условиях, не все полученные таким образом m-мерные Δ-циклы гомологичны нулю. Найдется поэтому сфероид (S^m, f), определяющий цикл z_m многообразия R такой, что

$$z_m \not\sim 0 \pmod 2 \quad \text{на} \quad R. \tag{1}$$

Дальше все гомологии понимаются по модулю 2.

Отображение f индуцирует отображение g семейства всех окружностей A_{3m-3} сферы S^m в Σ. При этом все одноточечные окружности A_{3m-3} переходят в одноточечные кривые Σ. Отождествим все одноточечные кривые в A_{3m-3}, соответственно, в Σ. Тогда A_{3m-3} становится псевдомногообразием, и отображение g цикла $\mathring{A}_{3m-3} = \eta_{3m-3}$ в Σ определяет Δ-цикл z_{3m-3} пространства Σ. Обозначим через η_{m-1} Δ-цикл псевдомногообразия A_{3m-3}, состоящий из всех окружностей, проходящих через две точки p_1, p_2; через η_{2m-2} — Δ-цикл, состоящий из всех больших кругов сферы S^m.

Отображение g переводит η_{m-1}, соответственно η_{2m-2}, в Δ-цикл z_{m-1}, соответственно z_{2m-2}, пространства Σ.

Мы докажем, что Δ-циклы z_{m-1}, z_{2m-2}, z_{3m-3} подчинены друг другу в смысле Люстерника ([3]), а именно: существует такой ∇-цикл Z^{m-1} пространства Σ, что

$$Z^{m-1} \cdot z_{m-1} \neq 0, \quad (Z^{m-1})^2 \cdot z_{2m-2} \neq 0, \quad (Z^{m-1})^3 \cdot z_{3m-3} \neq 0.$$

Согласно результатам ([5]), отсюда будут вытекать теоремы 1 и 2. Доказательство основывается на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Цикл η_{m-1} есть единственный базисный $(m-1)$-мерный Δ-цикл на A_{3m-3}. Обозначая через H^{m-1} ∇-цикл, двойственный η_{m-1} на A_{3m-3}, имеем:*

$$(H^{m-1})^2 \cdot \eta_{2m-2} = (H^{m-1})^3 \cdot \eta_{3m-3} = 1.$$

Пусть p_0 — точка A_{3m-3}, полученная отождествлением всех одноточечных окружностей. Обозначим через T звезду p_0 в A_{3m-3} и рассмотрим открытый комплекс $M_0 = A_{3m-3} \setminus T$ и замкнутый комплекс $M = \overline{M}_0$. Между группами $\Delta_{m-1}(M_0)$ и $\Delta_{2m-2}(M)$ существует, как известно, двойственность (см., например, ([7]), п. 1, лемма). Можно рассматривать η_{2m-2} как Δ-цикл комплекса M, а $\eta^0_{m-1} = \eta_{m-1} \cap M_0$ — как Δ-цикл M_0. Легко видеть, что

$$\eta^0_{m-1} \times \eta_{2m-2} = 1. \tag{2}$$

Отсюда следует, что η_{m-1} не гомологичен нулю на A_{3m-3}. Далее, если $\zeta^0_{m-1} \times \eta_{2m-2} = 0$, то цикл ζ^0_{m-1}, по теореме Л. С. Понтрягина о снятии цикла, может быть снят с тела N цикла η_{2m-2}, так что $\zeta^0_{m-1} \sim \vartheta^0_{m-1}$, где ϑ^0_{m-1} не содержит больших кругов сферы S^m и, следовательно, может быть деформирован на M в подмножество границы Γ комплекса M.

Из доказанного легко вывести, что η_{m-1} — единственный базисный цикл A_{3m-3}.

Пусть будет H^{m-1} такой ∇-цикл на A_{3m-3}, что

$$H^{m-1} \cdot \eta_{m-1} = 1. \tag{3}$$

Можно рассматривать η_{m-1} как цикл $(2m-2)$-мерного многообразия N, а N — как множество всех окружностей, пересекающих в диаметрально противоположных точках некоторую сферу $S^{m-1} \subset S^m$. Пусть L — множество больших кругов сферы S^{m-1} (одновременно являющихся большими кругами S^m). Легко видеть, что всякий цикл λ_{m-1}, имеющий на N нулевое пересечение с η_{m-1}, может быть на N деформирован в подмножество L; а так как L гомотопно нулю на A_{3m-3}, то η_{m-1} есть единственный из базисных циклов N, не гомологичный нулю на A_{3m-3}. Кроме того,

$$\eta_{m-1} \times \eta_{m-1} = 1 \quad \text{на } N,$$

и из (3) следует:

$$(H^{m-1} \times H^{m-1}) \cdot \eta_{2m-2} = 1. \tag{4}$$

Так как H^{m-1} можно снять с $\overline{T}$, можно считать H^{m-1} ∇-циклом комплекса M, двойственным η^0_{m-1}; но тогда из (2) и (4) вытекает, что

$$(H^{m-1})^3 \eta_{3m-3} = 1.$$

Лемма 2. *Существует такой ∇-цикл Z^{m-1} пространства Σ, что*

$$Z^{m-1} \cdot z_{m-1} = 1, \quad (Z^{m-1})^2 \cdot z_{2m-2} = 1, \quad (Z^{m-1})^3 \cdot z_{3m-3} = 1.$$

Отображение g полиэдра A_{3m-3} в Σ определяет [2] гомоморфизмы φ групп $\Delta^k(A_{3m-3})$ в $\Delta^k(\Sigma)$ и гомоморфизм ψ кольца $\nabla(\Sigma)$ в $\nabla(A_{3m-3})$, причем для всякой пары $\eta \in \Delta^k(A_{3m-3})$, $Z \in \nabla^k(\Sigma)$ будет

$$\eta \cdot \psi(Z) = \varphi(\eta) \cdot Z. \tag{5}$$

Применяя естественный гомоморфизм α [9] к циклу $z_{m-1} = \varphi(\eta_{m-1})$, мы получаем цикл z_m, определяемый сфероидом (S^m, f) и не гомологичный нулю. Следовательно, имеем

$$z_{m-1} \not\sim 0 \quad \text{на } \Sigma.$$

Найдется поэтому ∇-цикл Z^{m-1} пространства Σ такой, что

$$Z^{m-1} \cdot z_{m-1} = 1. \tag{6}$$

Пользуясь (5), (6), найдем последовательно:

$$\eta_{m-1} \cdot \psi(Z^{m-1}) = \varphi(\eta_{m-1}) \cdot Z^{m-1} = z_{m-1} \cdot Z^{m-1} = 1, \quad \psi(Z^{m-1}) \sim H^{m-1} \text{ в } A_{3m-3},$$
$$z_{2m-2} \cdot (Z^{m-1})^2 = \varphi(\eta_{2m-2}) \cdot (Z^{m-1})^2 = \eta_{2m-2} \cdot \psi((Z^{m-1})^2) = \eta_{2m-2} \cdot (H^{m-1})^2 = 1,$$
$$z_{3m-3} \cdot (Z^{m-1})^3 = \varphi(\eta_{3m-3}) \cdot (Z^{m-1})^3 = \eta_{3m-3} \cdot (H^{m-1})^3 = 1.$$

Лемма доказана.

Теорема 2 непосредственно следует из леммы 2. Теорема 1 следует из леммы 2 и из результатов нашей работы [7], где вычислено кольцо гомологий (mod 2) пространства замкнутых кривых на двумерной сфере, причем длина этого пространства равна 3.

Поступило
19 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Комбинаторная топология, 1947. [2] П. С. Александров, Изв. АН СССР, сер. матем., № 6 (1942). [3] Л. А. Люстерник, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 19 (1947). [4] Л. А. Люстерник, А. И. Фет, ДАН, 81, № 1 (1951). [5] M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, 1934. [6] J.-P. Serre, Ann. of Math., 54, № 3 (1951). [7] А. И. Фет, ДАН, 66, № 3 (1949). [8] А. И. Фет, Матем. сборн., нов. сер., 30, № 2 (1952). [9] А. И. Фет, ДАН, 88, № 3 (1952). [10] С. Фролов, Л. Эльсгольц, Матем. сборн., 42, № 5 (1935).