

В. Ф. РОГАЧЕНКО

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ
ЛОБАЧЕВСКОГО С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ГИПЕРЦИРКУЛЯ
ИЛИ ОРИЦИРКУЛЯ И ГИПЕРЦИРКУЛЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 XII 1952)

А. С. Смогоржевским (¹⁻³) было доказано, что любая задача на построение 2-й степени в плоскости Лобачевского может быть решена без помощи линейки, если в качестве инструментов используются все три циркуля: обычный циркуль, орициркуль и гиперциркуль. Другими словами, была показана возможность выполнения построений, аналогичных построениям Маскерони в евклидовой плоскости. При этом было существенно использовано преобразование инверсии в плоскости Лобачевского.

В настоящей работе доказывается, что при любых построениях 2-й степени в плоскости Лобачевского без помощи линейки достаточно использовать один из двух комплексов инструментов: циркуль — гиперциркуль ($\zeta - \gamma$) или орициркуль — гиперциркуль ($\omicron - \gamma$). При доказательстве преобразование инверсии не используется, что значительно упрощает решение конструктивных задач.

Как известно (⁴, стр. 144), в плоскости Лобачевского всякая задача 2-й степени разрешима при помощи циркуля и линейки. Такое решение, в конечном счете, сводится к решению тех задач, которые будем называть главными:

А. Найти точку пересечения прямых AB и CD .

Б. Найти точки пересечения прямой AB и окружности, центр O и радиус r которой известны.

В. Найти точки пересечения двух окружностей, центры O_1, O_2 и радиусы r_1, r_2 которых известны.

Для доказательства решимости задач 2-й степени с помощью ($\zeta - \gamma$) или ($\omicron - \gamma$) достаточно показать, как этими инструментами решаются главные задачи А, Б, В. Решение последних основано на решении нескольких задач, которые будем называть вспомогательными. Список последних зависит от используемого при построениях комплекса инструментов.

Для краткости введем следующие обозначения для задаваемых или проводимых линий: пр. AB — прямая, проходящая через данные точки A и B ; $k(O, r)$ или $\hat{k}(O, AB)$ — окружность с центром в точке O и радиусом r или AB ; $h(AA', B)$ — орицикл с направленной осью AA' , проходящий через точку B ; $e(AB, d)$ или $e(AB, CD)$ — эквидистанта с базисом AB и дистанцией d или CD .

Линии, не вычерчиваемые используемыми инструментами, на чертежах обозначены пунктиром.

§ 1. Вспомогательные задачи и их решение с помощью (ц — г).

1°. Удвоить данный отрезок AB .

2°. Восстановить перпендикуляр к данной пр. AB в данной на ней точке C .

3°. Из данной точки C опустить перпендикуляр на пр. AB .

Решение задач 1—3° с помощью (ц — г) дано в (3), стр. 134—136.

4°. Разделить пополам отрезок AB .

Находим точку C , равноудаленную от A и B . Затем находим основание M перпендикуляра, опущенного из C на пр. AB (3°). Тогда $AM = MB = \frac{1}{2}AB$.

5°. Разделить пополам дугу AB окружности с центром O .

Находим точку C (рис. 1), равноудаленную от A и B и не совпадающую с O . Строим $OD \perp OC$ (2°). Берем в гиперциркуль отрезок $OA = r$ и строим $e(OD, r)$ и $e_1(OC, r)$, которые пересекутся в P, Q, R, S . Пусть P и Q лежат по одну сторону прямой OC . Строим $e_2(PQ, r)$, которая пересечет окружность в искомым точках E и F .

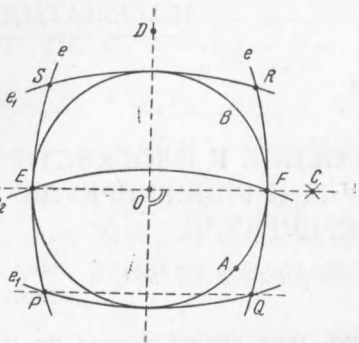


Рис. 1

6°. Перенести отрезок AB на пр. CD , отложив его от точки E .

Строим $k(E, AB)$ и находим на ней точки F и G , симметричные относительно пр. CD . Находим середины H и K каждой из дуг \widehat{CD} (5°). Тогда $EH = EK = AB$.

§ 2. Решение главных задач с помощью (ц — г).

Задача А. Строим $e(AB, d)$ и $e_1(CD, d)$, где d — произвольная дистанция. Если e и e_1 пересекаются в четырех точках, то находим точки E и F , являющиеся противоположными вершинами «эквидистантного параллелограмма», а затем находим середину M отрезка EF (6°), которая будет искомой точкой. Если e и e_1 имеют не более двух общих точек, то их базысы — пр. AB и CD — сверхпараллельны или параллельны.

Задача Б. Если пр. AB не проходит через центр O , то строим O_1 , симметричную с O относительно пр. AB . Если окружности $k(O, r)$ и $k_1(O_1, r)$ пересекаются, то их общие точки будут искомыми. Если пр. AB проходит через центр O , то искомые точки пересечения найдем, отложив на пр. AB по обе стороны от O отрезки, равные радиусу r (4°).

Задача В решается непосредственным вычерчиванием окружностей.

Из §§ 1 и 2 видим, что с помощью (ц — г) разрешима любая задача на построение 2-й степени в плоскости Лобачевского.

§ 3. Вспомогательные задачи и их решение с помощью (о — г).

1°. Удвоить отрезок AB .

2°. Восстановить перпендикуляр к пр. BC в данной на ней точке A .

Строим (рис. 2) $h(BA, B)$ и $e(BA, d)$, где d — произвольная дистанция. Пусть D и E — точки пересечения h и e . Строим далее

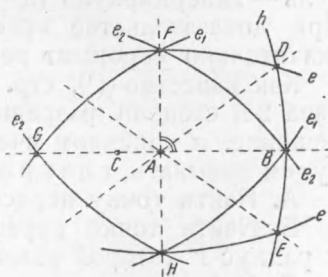


Рис. 2

$e_1(AD, B)$ и $e_2(AE, B)$. В полученном «эквилидистантном ромбе» $BFGH$ диагонали BG и FH образуют прямой угол и, пересекаясь, делятся пополам. Тогда $BG = 2AB$, $\angle BAF = \pi/2$.

3°. Разделим угол $\angle ABC$ пополам.

Строим $e(AB, d)$ и $e_1(BC, d)$, где d — произвольная дистанция. Пусть D — точка пересечения e и e_1 , лежащая внутри угла ABC . Тогда $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC$.

4°. Из точки C опустить перпендикуляр на пр. AB .

5°. Разделить пополам отрезок AB .

Комплексом (о — г) задачи 4°, 5° решаются так же, как и задачи 3°, 4° в § 1.

6°. Перенести отрезок AB на пр. CD , отложив его от точки E .

Находим середину F отрезка AE (5°). Удвоив отрезок BF , найдем точку G (1°). Найдем биссектрисы EI и EH углов $\angle GEC$ и $\angle GED$ (3°). Затем находим основания J и K перпендикуляров, опущенных из G на EI и EH (4°). Удвоив отрезки GK и GJ , получим точки L и M такие, что $EL = EM = AB^*$.

7°. Найти точки пересечения пр. AB и эквидистанты $e(CD, d)$.

Если $AB \perp CD$, то находим основание E перпендикуляра (4°) и от точки E по обе стороны на пр. AB откладываем отрезок d (6°). Если AB не перпендикулярна к CD , то искомые точки (если они существуют) легко найти как точки пересечения данной эквидистанты и эквидистанты, ей симметричной относительно пр. AB . Вторая эквидистанта строится с помощью (о — г).

8°. Для данного угла $\alpha = \angle ABC$ ($< \pi/2$) построить отрезок $a = \Delta(\alpha)$.

Строим (рис. 3) $BD \perp AB$ (2°). Из C опускаем пр. $CD \perp BD$ (4°) и, взяв

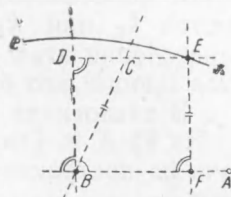


Рис. 3

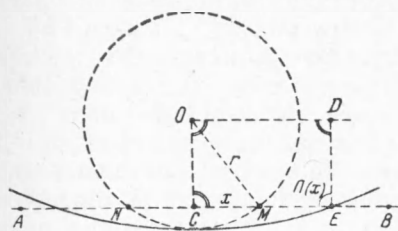


Рис. 4

отрезок BC в гиперциркуль, строим $e(AB, BC)$.

Пусть E — та из двух точек пересечения e и пр. CD (7°), для которой C лежит между D и E . Из E опускаем $EF \perp AB$. Тогда в трипрямоугольнике $BDEF$ $\angle FBC = \Pi(BF)$, т. е. BF — искомый отрезок.

§ 4. Решение главных задач с помощью (о — г).

Задача А с помощью (о — г) решается так же, как в § 2.

Задача Б. Если AB не проходит через O , то строим (рис. 4) $OC \perp AB$ (4°), $OD \perp OC$ (2°) и $e(OD, r)$. Данная прямая и окружность пересекаются, если пересекаются эта прямая и эквидистанта e . Пусть E — одна из двух точек пересечения пр. AB и e (7°). Опустив $ED \perp OD$, получим трипрямоугольник $OCED$, в котором $\angle CED$ есть угол параллельности отрезка x — половины хорды, отсекаемой окружностью на пр. AB . По этому углу строим соответствующий отрезок параллельности (8°), который откладываем на пр. AB по обе стороны от C . Получим точки M и N , которые и будут искомыми.

Если пр. AB проходит через центр O , то точки пересечения находятся откладыванием отрезка r на пр. AB по обе стороны от O .

Задача В. Предварительно выясняем, пересекаются ли данные окружности. Для этого на отрезке O_1O_2 откладываем от O_1 в сто-

* Ход решения задачи аналогичен (4), зад. 370.

рону O_2 отрезок $O_1P_1 = r_1$, а от O_2 в сторону O_1 — отрезок $O_2P_2 = r_2$ (6°). Если пара точек O_1, P_1 разделяет пару точек O_2, P_2 , то окружности пересекаются.

Строим теперь $O_1A \perp O_1O_2$ и $O_2B \perp O_1O_2$ (2°). На пр. O_1A от точки O_1 отложим $O_1C = r_2$, а на пр. O_2B от точки O_2 отложим $O_2D = r_1$. Найдём середину E отрезка CD (5°) и строим $EF \perp CD$ (2°). Найдя точку G пересечения пр. O_1O_2 и EF (задача А) и построив $GH \perp O_1O_2$, получим радикальную ось окружностей $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$. Найдя точки пересечения радикальной оси GH с любой из двух окружностей k_1 или k_2 (задача Б), получим искомые точки M и N пересечения этих окружностей. Если $r_1 = r_2$, то радикальная ось строится проще: это будет медиатриса отрезка O_1O_2 . Ход решения задач Б и В аналогичен (4), задачи 390, 391.

Из §§ 3 и 4 видим, что с помощью (о — г) разрешима любая задача на построение 2-й степени в плоскости Лобачевского.

Львовский государственный университет
им. Ив. Франко

Поступило
28 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ О. С. Смогоржевський, Наук. зап. Київськ. держ. ун-та, 7, 4, 151 (1948).
² О. С. Смогоржевський, Теорія геометричних побудов в просторі Лобачевського, 1949. ³ А. С. Смогоржевський, Геометрические построения в плоскости Лобачевского, 1951. ⁴ Н. М. Несторович, Геометрические построения в плоскости Лобачевского, 1951.