

М. А. МЕРТВЕЦОВА

АНАЛОГ ПРОЦЕССА КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ ДЛЯ ОБЩИХ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 26 XI 1952)

Д. М. Загадский ⁽¹⁾ исследовал сходимость аналога процесса Ньютона для нелинейных интегральных уравнений. Л. В. Канторович ⁽²⁾ обобщил метод Ньютона на нелинейные функциональные уравнения. Из результатов Канторовича, в частности, вытекают, например, известные результаты Коши ⁽³⁾, Островского ⁽⁴⁾ и другие, полученные для случая вещественного или комплексного уравнения

$$P(x) = 0. \quad (1)$$

Г. С. Салехов ⁽⁵⁾ исследовал вопрос о сходимости одного итеративного процесса также для уравнения (1) при условии, когда $P(x)$ в рассматриваемой области допускает производную 3-го порядка. При этом быстрота сходимости этого процесса оказывается значительно сильнее, чем у процесса Ньютона. Если выбрано некоторое начальное приближение x_0 , то этот процесс будет определен следующей итерацией:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2P'(x_n)P(x_n)}{2[P'(x_n)]^2 - P''(x_n)P(x_n)}. \quad (2)$$

В данной работе метод Г. С. Салехова распространен на общие нелинейные функциональные уравнения $P(x) = 0$, где операция P является трижды дифференцируемой в смысле Фреше ⁽⁶⁾ и переводит элементы нормированного пространства $X \supset x$ в элементы другого нормированного пространства $Y \supset y$. При этом последовательные приближения выражаются одно через другое следующим образом:

$$x_{n+1} - x_n + Q_n \Gamma_n P(x_n) = 0, \quad (3)$$

где $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ и $Q_n = [J - 1/2 \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)]^{-1}$.

Условия сходимости последовательности x_n к точному решению и одновременные достаточные условия для существования этого решения даются следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть для начального приближения выполнены следующие условия:

- 1) для элемента x_0 начального приближения $P'(x_0)$ имеет обратную операцию и $\|\Gamma_0\| \leq B_0$;
- 2) существует операция Q_0 и $\|Q_0 \Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$;
- 3) $\sup \|P''(x)\| \leq M$, $\sup \|P'''(x)\| \leq N$ в области G , определяемой неравенством $\|x - x_0\| \leq 2\eta_0$;

$$4) h_0 = B_0 M \gamma_0 \leq 1/2;$$

$$5) R_0 = \left[\frac{N}{M^2 B_0} (2 + h_0) + 3 \right] (1 + h_0) \leq 9.$$

Тогда уравнение $P(x) = 0$ в области G имеет решение, к которому сходится процесс касательных гипербол, причем быстрота сходимости определяется неравенством

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^{n-1}} \gamma_0.$$

Доказательство. Покажем, что при переходе от x_0 к x_1 условия 1) — 5) не нарушаются.

На основании (3) и условий 2), 4), а также теоремы Банаха имеем

$$\|\Gamma_1\| \leq \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1, \quad (4)$$

т. е. условие 1) выполнено для точки x_1 .

Полагая

$$f_n(x) = [J - 1/2 \Gamma_n P''(x_n) (x - x_n)] \Gamma_n P(x)$$

и применяя правило дифференцирования операций, данное М. К. Гавуриным (7) нетрудно доказать неравенство

$$\|\Gamma_1 P(x_1)\| \leq \frac{[N(2 + h_0) + 3M^2 B_0] B_0 \gamma_0}{12 \left(1 - \frac{h_0}{2}\right) (1 - h_0)} = \delta_1. \quad (5)$$

Пользуясь им, теоремой Банаха и условием 3), получим

$$\|Q_1 \Gamma_1 P(x_1)\| = \gamma_{11} \leq \frac{\delta_1}{1 - MB_0 \delta_1}. \quad (6)$$

Пользуясь (5) и условием 4), будем иметь

$$\gamma_{11} \leq 2h_0^2 \gamma_0 \leq \frac{\gamma_0}{2}, \quad (7)$$

т. е. выполнено условие 2) для точки x_1 . Условие 3) также выполнено для точки x_1 , так как соответствующая ей область G не будет выходить за пределы области $\|x - x_n\| < 2\gamma_0$.

Зная, что $B_1 \leq 2B_0$ и используя неравенство (7), получим

$$h_1 \leq 4h_0^3 \leq h_0 \leq 1/2. \quad (8)$$

В силу того, что $B_1 > B_0$ и $h_1 \leq h_0$, очевидно, $R_1 < R_0 < 9$.

Итак, для $x = x_1$ выполнены все условия 1) — 5) с заменой чисел B_0, γ_0, h_0, R_0 на $B_1, \gamma_{11}, h_1, R_1$. Это позволяет продолжить последовательное определение элементов x_n и оценить связанные с ними числа h_n, B_n, γ_n, R_n на основании следующих соотношений:

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}}; \quad (9)$$

$$\gamma_n \leq 2h_{n-1}^2 \gamma_{n-1}; \quad (10)$$

$$h_n \leq 4h_{n-1}^3; \quad (11)$$

$$R_n = \left[\frac{N}{M^2 B_n} (2 + h_n) + 3 \right] (1 + h_n). \quad (12)$$

(10) совместно с (11) дает

$$\eta_n \leq \frac{1}{2^n} (2h_0)^{3^n-1} \eta_0. \quad (13)$$

Далее, зная, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \eta_n$, и пользуясь (13), будем иметь:

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^n-1} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \eta_0. \quad (14)$$

Следовательно, существует $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Переходя к пределу в (13) при $p \rightarrow \infty$, получим

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^n-1} \eta_0. \quad (15)$$

Затем, зная, что $\left\| P'(x_n) \left[J - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right] \right\| \leq \frac{5}{4B_n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$, переходя к пределу в уравнении (3) при $n \rightarrow \infty$, докажем, что x^* является решением уравнения $P(x) = 0$.

Докажем теперь теорему, которая устанавливает область единственности решения.

Теорема 2. При выполнении условий 1)–5) в области $\|x - x_0\| < \sqrt{2} \eta_0$ уравнение $P(x) = 0$ имеет единственное решение.

Доказательство. Для любого решения τ уравнения $P(x) = 0$, согласно (3), будем иметь

$$f'_n(x_n) (\tau - x_{n+1}) + \frac{f''_n(\zeta_n) (\tau - x_n)^2}{6} = 0.$$

Отсюда нетрудно доказать справедливость неравенства

$$\|\tau - x_{n+1}\| \leq \frac{2^{2n-2}}{\eta_0^2} \|\tau - x_n\|^3. \quad (16)$$

Далее предполагая, что $\|\tau - x_0\| \leq \rho \eta_0$, методом индукции легко доказывается неравенство

$$\|\tau - x_{n+1}\| \leq 2^{-\frac{2n+1+3^{n+1}}{2}} \rho^{3^{n+1}} \quad (n \geq 2).$$

Следовательно, если $\rho \leq \sqrt{2}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tau - x_{n+1}\| = 0$, т. е. $\tau = x^*$.

Применим данный процесс к нелинейным интегральным уравнениям вида

$$x(s) = \int_a^b K(s, t, x(t)) dt, \quad (17)$$

где K — непрерывная функция своих аргументов и трижды дифференцируемая по x в области $|x - x_0| \leq 2\eta_0$. В этом случае последовательные приближения будут определяться следующей итерацией, если записать (17) в виде:

$$(J - K)x = 0,$$

$$\begin{aligned} [J - K'_x(x_n) + \frac{1}{2} K''_{xx}(x_n) [J - K'_x(x_n)]^{-1} (J - K)x_n] (x_{n+1} - x_n) + \\ + (J - K)x_n = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Если операцию $P(x) = x(s) - \int_a^b K(s, t, x(t)) dt$ рассматривать как операцию из C в C , то получим следующую теорему:

Теорема 3. Если выполнены условия:

1) для начального значения $x_0(s)$ ядро $K_x(s, t, x_0(t)) = k(s, t)$ имеет резольвенту $G(s, t)$, причем $\int_a^b |G(s, t)| dt \leq B$, $a \leq s \leq b$;

$$2) |\varphi_0(s)| = |x_0(s) - \int_a^b K(s, t, x_0(t)) dt + 1| \leq \bar{\eta};$$

3) ядро $K_x(x_0) - 1/2 K''_{xx}(x_0) [J - K_x(x_0)]^{-1} (J - K) x_0$ имеет резольвенту $R(s, t)$, причем $\int_a^b |R(s, t)| dt \leq C$, $a \leq s \leq b$;

$$4) |K''_{u^2}(s, t, u)| \leq M, \quad |K''''_{u^3}(s, t, u)| \leq N, \quad |u - u_0| \leq 2\eta_0, \quad \eta_0 = (c+1)\bar{\eta};$$

$$5) h_0 = (1+B)(1+C)\bar{\eta}M(b-a) \leq 1/2;$$

$$6) R_0 = \left[\frac{N}{M^2(b-a)(1+B)} (2+h_0) + 3 \right] (1+h_0) \leq 9,$$

то процесс (18) для интегрального уравнения (17) сходится с быстротой (15) к решению этого уравнения, которое существует и лежит в области

$$|x^*(s) - x_0(s)| \leq 2(C+1)\bar{\eta},$$

и единственно в области

$$|x^*(s) - x_0(s)| \leq \sqrt{2}(C+1)\bar{\eta}.$$

Пример. Для уравнения

$$x(s) = 1 + 0,5146s^2 + s^2 \int_0^1 t \operatorname{arc} \operatorname{tg} x(t) dt, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

выбирая $x_0 = 2,246$, имеем $h_0 = 0,0568 < 1/2$, $R_0 = 7,5673 < 9$. При этом первое приближение дает $x_1 = 1 + 1,0096s^2$ ($x^* = 1 + s^2$).

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии наук СССР

Поступило
3 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. М. Загадский, ДАН, 59, № 6 (1948). ² Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, 3, 6, 170 (1948). ³ А. Сачу, Leçons sur le calcul différentiel, Paris, 1829. ⁴ А. Островский, Матем. сборн., 2, 1073 (1937). ⁵ Г. С. Салехов, ДАН, 82, № 4 (1952). ⁶ М. Fréchet, Ann. Ecole norm., 293 (1925). ⁷ М. К. Гавурин, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. наук, в. 19, 59 (1950).