Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 4

*МАТЕМАТИКА*

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

*(Представлено академиком В. И. Смирновым 29 XI 1952)*

Мы строим сходящийся разностный процесс, приводящий к решениы задачи Коши для линейных и квази-линейных систем, гиперболических в смысле Петровского [2]. И. Г. Петровским доказано существование решения и корректность задачи Коши, состоящей в определении решения $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ гиперболической системы

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m} a_{ij}^k(t, x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_N)\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + $$

$$+ b_i(t, x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_N) \quad (i = 1, \ldots, N), \tag{1}$$

удовлетворяющего при $t = 0$ условиям:

$$u_i|_{t=0} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m). \tag{2}$$

Кроме того, доказано, что возмущение, описываемое системой (1), распространяется с конечной скоростью.

В связи с этим мы, следуя И. Г. Петровскому, ограничиваемся рассмотрением того случая, когда коэффициенты уравнения (1) и начальные функции $\varphi_i$ периодичны по $X = (x_1, \ldots, x_m)$ с периодом $l$. С теоретической точки зрения это не есть сужение задачи.

Сначала мы рассматриваем линейную гиперболическую систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m} a_{ij}^k(t, X)\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(t, X)\, u_j + f_i(t, X), \quad i = 1, \ldots, N \tag{3}$$

при условиях (2). Ей сопоставляется следующая разностная система:

$$\frac{\Delta u_i(t, X)}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m} a_{ij}^k(t, X)\frac{\Delta u_j(t, X)}{\Delta x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(t, X)\, u_j(t, X) + f_i(t, X), \tag{4}$$

где $\Delta x_k = \frac{l}{n}$, $\frac{\Delta u_i(t, X)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[u_i(t + \Delta t, X) - u_i(t, X)]$, а $\frac{\Delta u_i(t, X)}{\Delta x_k} =$

$$= \frac{1}{4\Delta x}[u_i(t + \Delta t, x_1, \ldots, x_k + \Delta x, \ldots, x_m) - u_i(t + \Delta t, x_1, \ldots, x_k - \Delta x, \ldots, x_m) +$$
$$+ u_i(t, x_1, \ldots, x_k + \Delta x, \ldots, x_m) - u_i(t, x_1, \ldots, x_k - \Delta x, \ldots, x_m)].$$

* Настоящая заметка является кратким резюме кандидатской диссертации автора [1].

Обозначим через $u_{i\Delta}$ ее решение, удовлетворяющее условиям (2). Уравнения (4), выписанные для всех точек решетки $(t, X)$, у которых $t = p\Delta t$, а $X \in$ куб $Q_l$ $(0 \leqslant x_i \leqslant l,\ i = 1, \ldots, m)$, дают алгебраическую систему для определения $u_{i\Delta}$ в точках $((p+1)\Delta t, X)$, $X \in Q_l$, если считать a priori функции $u_{i\Delta}((p+1)\Delta t, X)$ $l$-периодическими по $X$ и учесть $l$-периодичность данных функций и функций $u_{i\Delta}(l_1\Delta t, X)$, вычисленных для $l_1 \leqslant p$.

Выбранная таким образом замена $\partial u_i / \partial t$ и $\partial u_i / \partial x_k$ позволяет добиться сходимости разностного процесса при любом соотношении между $\Delta t$ и $\Delta x$, лишь бы $\Delta t / \Delta x$ оставалось меньше какой-нибудь постоянной.

При достаточно малой длине периода $l$ относительно решений $u_{i\Delta}$ системы (4) устанавливается неравенство:

$$\Delta x^m \sum_{Q_l} \sum_{i=1}^{N} u_{i\Delta}^2 (p\Delta t, X) \leqslant c e^{c_1 p \Delta t} \cdot \Delta x^m \sum_{Q_l} \sum_{i=1}^{N} \left[ \varphi_i^2 (x) + \Delta t \sum_{s=0}^{p} f_i^2 (s\Delta t, X) \right], \qquad (5)$$

где $\sum\limits_{Q_l}$ означает суммирование по всем точкам $X$ решетки, принадлежащим $Q_l$. Константы $c$ и $c_1$ не зависят от $\Delta t$ и $\Delta x$ и определяются лишь коэффициентами системы (1) $a_{ij}^k$ и $b_{ij}$ и их производными до порядков $3m$ и $2m$. Аналогичные неравенства устанавливаются для разностных отношений $u_{i\Delta}$ по $x_k$ до порядка $k = [m/2] + 3$. Не останавливаясь на их доказательстве, отметим лишь, что при установлении (5) и, вообще, при исследовании решений задачи мы широко пользовались разложением $l$-периодических функций на решетке в конечные суммы Фурье по «ортонормированной» системе функций

$$\mu^{(k_1, \ldots, k_m)} (x_1, \ldots, x_m) = e^{\frac{2\pi}{l} i (k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m)}$$

При этом $\Delta x_k = l / n$, а $x_1, \ldots, x_m$ принимают значения $\frac{l}{n} p_1, \ldots, \frac{l}{n} p_m$, где $p_1, \ldots, p_m$, $k_1, \ldots, k_m$ пробегают все целые значения от 0 до $n - 1$. Такие конечные суммы обладают свойствами, аналогичными разложениям периодических функций в ряды Фурье. Кроме того, их использование в уравнениях весьма плодотворно благодаря тому, что они являются «собственными функциями» простейшего разностного уравнения, именно:

$$\frac{1}{\Delta x} [\mu^{(k_1, \ldots, k_m)} (x_1, \ldots, x_p + \Delta x, \ldots, x_m) - \mu^{(k_1, \ldots, k_m)} (x_1, \ldots, x_p - \Delta x, \ldots, x_m)] =$$
$$= i \frac{n}{l} \sin \frac{2\pi k_p}{n} \mu^{(k_1, \ldots, k_m)} (x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_m).$$

По вычисленным на решетке функциям $u_{i\Delta}$ мы строим тригонометрические полиномы $\tilde{u}_{i\Delta}$, которые при $\Delta x$ и $\Delta t \to 0$ вместе со своими производными равномерно в $Q_l \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ сходятся к искомым решениям $u_i$ и их соответственным производным.

Затем мы рассматриваем квази-линейные гиперболические системы (1) при нулевых начальных условиях $u_i|_{t=0} = 0$. Доказывается, что если систему (1) заменить разностной

$$\frac{\Delta u_i (t, X)}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} a_{ij}^k (t, X, u_1 (t, X), \ldots, u_N (t, X)) \frac{\Delta u_j (t, X)}{\Delta x_k} +$$
$$+ b_i (t, X, u_1 (t, X), \ldots, u_N (t, X)), \quad i = 1, \ldots, N,$$

где $\Delta u_l / \Delta t$ и $\Delta u_l / \Delta x_k$ определены так же, как и выше, то последовательно (по $t$) вычисленные из этой системы функции $u_{l\Delta}$ (или, точнее, $\tilde{u}_{l\Delta}$ и их производные) равномерно сходятся к решениям системы (1) при $\Delta x$ и $\Delta t \to 0$. При этом $\Delta t / \Delta x$ должно лишь оставаться ограниченным какой-нибудь постоянной.

Далее мы исследовали и некоторые другие способы замены системы (3) разностной. Так, показано, что замена $\frac{\partial u(t, X)}{\partial t}$ на $\frac{u(t+\Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t}$, а $\frac{\partial u}{\partial x}$ на $\frac{u(t, x+\Delta x) - u(t, x-\Delta x)}{2\Delta x}$, или на $\frac{u(t, x+\Delta x) - u(t, x)}{\Delta x}$, или на $\frac{u(t, x) - u(t, x-\Delta x)}{\Delta x}$ приводит, вообще говоря, к расходящемуся процессу уже для простейшего представителя системы (1), именно для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x)\frac{\partial u}{\partial x},$$

если $\Delta x$ и $\Delta t$ считать величинами одного и того же порядка малости*. Если же считать величинами одного и того же порядка малости $\Delta t$ и $\Delta x^2$, то разностный процесс окажется сходящимся.

Для системы уравнений (3), коэффициенты которых постоянны, мы указываем другой сходящийся разностный процесс, приводящий к решению задачи Коши. Именно, надо в (3) заменить $\frac{\partial u_l}{\partial t}$ на $\frac{1}{2\Delta t}[u_l(t + \Delta t, X) - u_l(t - \Delta t, X)]$ при $t > \Delta t$ и на $\frac{1}{\Delta t}[u_l(\Delta t, X) - u_l(0, X)]$ при $t = 0$, а $\frac{\partial u_l(t, X)}{\partial x_k}$ заменить на $\frac{1}{2\Delta x}[u_l(t, x_1, \ldots, x_k + \Delta x, \ldots, x_m) - u_l(t, x_1, \ldots, x_k - \Delta x, \ldots, x_m)]$. Решения $u_{l\Delta}$ так полученной разностной системы будут сходиться к искомым решениям, если $\Delta t / \Delta x$ меньше некоторого числа, определяемого коэффициентами $a_{ij}^k$ системы (3). Процесс вычисления решений $u_{l\Delta}$ в случае последней замены проще, чем рассмотренный выше для систем с переменными коэффициентами. Преимущество же первой замены состоит в том, что соответствующий ей разностный процесс сходится при любом соотношении шагов $\Delta t$ и $\Delta x$.

Заметим, наконец, что для систем вида (1), у которых $a_{ij}^k = a_{ji}^k$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, m$, исследование сходимости разностного процесса значительно проще, чем в общем случае. Для таких систем для доказательства сходимости (мы имеем в виду первую замену) нет надобности накладывать какие-либо ограничения на длину периода $l$, прибегать к суммам Фурье и требовать много производных от коэффициентов системы. Неравенство (5) имеет место при условии, что коэффициенты системы $\partial a_{ij}^k / \partial x_k$, $\varphi_l$ и $f_l$ суть непрерывные функции.

---

* Так, для решения уравнения $\frac{1}{\Delta t}[u(t+\Delta t, x) - u(t, x)] = \frac{1}{2\Delta x}[u(t, x+\Delta x) - u(t, x-\Delta x)]$, равного при $t = 0$ $\varphi(x) = 1 + \sum_{p=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{p^4} e^{\frac{2\pi}{l} ipx}$, сумма $\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} u^2(t, s\Delta x) \to \infty$ при $n \to 0$ и $t > 0$. Для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ плоха замена $\frac{\partial u}{\partial x}$ на $\frac{1}{\Delta x}[u(t, x) - u(t, x-\Delta x)]$, а для $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ плоха замена $\frac{\partial u}{\partial x}$ на $\frac{1}{\Delta x}[u(t, x+\Delta x) - u(t, x)]$.

Как стало известно автору из работы (3) 1950 г., упомянутые выше разложения в конечные суммы Фурье использовались и другими математиками для исследования разностных процессов, связанных с решениями простейших уравнений математической физики. Среди этих математиков в первую очередь следует назвать Неймана, который использовал аналогичные разложения для установления так называемой устойчивости разностной схемы. Заметим, что все указанные нами выше сходящиеся разностные схемы устойчивы в смысле Неймана.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
17 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, Автореферат кандидатской диссертации, Ленинградск. ун-т, март, 1949. [2] И. Г. Петровский, Матем. сборн., 2 (44), № 5, 815 (1937). [3] G. G. O'Brien, M. A. Hyman, S. Kaplan, J. Math. and Phys., 29, 233 (1950).