Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 4

*МАТЕМАТИКА*

Я. Л. ГЕРОНИМУС

# О СРЕДНИХ И РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

*(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 3 XI 1952)*

1. Рассмотрим комплекснозначную периодическую функцию $\psi(\theta) \in L^p(0, 2\pi)$, где $p > 1$, и обозначим через $J_n^p$ ее среднее приближение при помощи некоторой системы многочленов $\{R_n(z)\}$

$$\|\psi - R_n\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(\theta) - R_n(e^{i\theta})|^p\, d\theta\right\}^{1/p} = J_n^p \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Теорема 1. *Если функция $J_n^{(p)} = J_p(n)$ имеет смысл при непрерывном изменении аргумента $n$, причем $x^{1/p} J_p(x)$ не возрастает и стремится к нулю при $x \to \infty$, и если существует несобственный интеграл*

$$\int_0^\infty x^{-1/p'} J_p(x)\, dx, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{2}$$

*то аналитическая функция $\varphi(z) \in H_p$, граничная функция* которой эквивалентна $\psi(\theta)$, непрерывна в замкнутой области $|z| \leqslant 1$, причем имеет место оценка*

$$|\varphi(z) - R_n(z)| \leqslant \varepsilon_n, \quad |z| \leqslant 1, \quad \varepsilon_n = C_1 \int_{n/4}^\infty x^{-1/p'} J_p(x)\, dx^{**}. \tag{3}$$

Для доказательства достаточно применить с небольшими изменениями методы, которые применены в ([4, 5])***.

Примечание 1. Если $J_n^{(p)}$ обозначает наилучшее среднее приближение функции, являющейся граничной для $\varphi(z) \in H_p$, то для наилучшего равномерного приближения $\mathcal{E}_n$ функции $\varphi(z)$ в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ имеем по (3) $\mathcal{E}_n \leqslant \varepsilon_n$****.

Примечание 2. Если рассматривается более общее пространство $L_\sigma^p$ с нормой

$$\|f\|_p^\sigma = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p\, d\sigma(\theta)\right\}^{1/p}, \tag{4}$$

* Так как почти всюду в $[0, 2\pi]$ существуют граничные значения $\varphi(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r \to 1-0} \varphi(re^{i\theta})$, то граничной функцией для $\varphi(z)$ является $\varphi(e^{i\theta})$.

** См. ([4]), теоремы 2.2.1, 3.4.2, 4.2.1; ([5]), § 39.

*** $C_1, C_2, \ldots$ — константы, не зависящие от $n$.

**** В обоих случаях рассматриваются приближения при помощи многочленов степени не выше $n$.

причем функция $\sigma(\theta)$ не убывает в $[0, 2\pi]$ и имеет бесчисленное множество точек роста, и если существует интеграл

$$\int_0^{2\pi} \{\sigma'(\theta)\}^{-k} d\theta, \quad k > 0, \tag{5}$$

то, применяя неравенство Гельдера, легко показать, что при условии

$$\| \psi - R_n \|_p^{\sigma} = J_n^{(p)}$$

теорема 1 сохраняет силу, если в формулу (3) подставить вместо $p'$ величину $\frac{kp}{k(p-1)-1}$.

Теорема 2. *Если вещественная периодическая функция $f(\theta) \in L^p(0, 2\pi)$ имеет интегральный модуль непрерывности $\omega_p(\delta)$, причем функция $x^{-1/p}\omega_p(x)$ не убывает, стремится к нулю вместе с $x$ и существует несобственный интеграл*

$$\int_0^b y^{-1-1/p}\omega_p(y)\, dy, \tag{6}$$

*то: 1) существует такая система многочленов $\{R_n(z)\}$, что в формуле (3) можно положить*

$$J_n^{(p)} = J_p(n) \leqslant C_2\omega_p\left(\frac{1}{n}\right); \tag{7}$$

*2) функция $f(\theta)$ эквивалентна непрерывной функции, имеющей модуль непрерывности*

$$\omega(\delta) \leqslant C_3 \int_0^{4\delta} \frac{dz}{z} \int_0^z y^{-1-1/p}\omega_p(y)\, dy. \tag{8}$$

Доказательство 1) основано на теореме о возможности аппроксимации функции $f(\theta)$ в метрике $L^p$ с погрешностью, не превышающей $C\omega_p\left(\frac{1}{n}\right)$ ([1], § 89), и на теореме М. Рисса ([8]) о сопряженных функциях. Для доказательства 2) подставляем (6) в (3) и пользуемся ([5]) (§ 40).

В частности, если $\omega_p(\delta) = O(\delta^{\alpha})$, причем $\alpha > 1/p$, то по (7) получим $\omega(\delta) = O(\delta^{\alpha-1/p})$, т. е. придем к теореме Харди — Литтльвуда ([7]): *если $f(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$, $\alpha > 1/p$, то $f(\theta)$ эквивалентна непрерывной функции класса $\mathrm{Lip}(\alpha - 1/p)$.*

Полагая в (7)

$$\omega_p(\delta) = C_4\delta^{1/p}|\lg\delta|^{-\alpha-3}, \quad \alpha > 0, \tag{9}$$

получим

$$\omega(\delta) \leqslant C_5 |\lg\delta|^{-\alpha-1}, \tag{9'}$$

т. е. *функция $f(\theta)$, обладающая интегральным модулем непрерывности (9), эквивалента непрерывной функции, удовлетворяющей условию Дини — Липшица.*

Теорема 3. *Если функция $p(\theta)$ ограничена почти всюду в $[0, 2\pi]$, т. е. $0 < m_1 \leqslant p(\theta) \leqslant m_2$, и обладает интегральным модулем непрерывности $\omega_p(\delta)$, то теоремы 1 и 2 сохраняют свою силу, причем в этом случае*

$$\varphi(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0 \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \lg p(\theta)\, d\theta\right\}, \quad |z| < 1; \tag{10}$$

*при этом функция $p(\theta)$ эквивалентна непрерывной функции с модулем непрерывности* (8).

Для доказательства достаточно слегка видоизменить рассуждения нашей заметки ([3]).

2. Пользуясь доказанными теоремами и слегка видоизменяя рассуждения, которыми мы пользовались в ([3]), мы получим асимптотическую формулу для многочленов, ортогональных на единичной окружности, справедливую в замкнутой области $|z| \leqslant 1$.

Теорема 4. *Пусть многочлены $\{\hat{P}_n(z)\}$ ортогональны и нормальны на единичной окружности с весом $p(\theta)$*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta)\hat{P}_n(e^{i\theta})\overline{\hat{P}_k(e^{i\theta})}\,d\theta = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases} \tag{11}$$

*который ограничен почти повсюду в* $[0, 2\pi]$

$$0 < m_1 \leqslant p(\theta) \leqslant m_2; \tag{12}$$

*если интегральный модуль непрерывности $\omega_2(\delta)$ веса удовлетворяет условиям теоремы 2, то в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ имеем*

$$|\hat{P}_n^*(z) - \pi(z)| \leqslant C_6 \int_0^{4/n} y^{-3/2}\omega_2(y)\,dy, \quad \hat{P}_n^*(z) = z^n \overline{\hat{P}}_n\left(\frac{1}{z}\right), \tag{13}$$

*где*

$$\pi(z) = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\lg p(\theta)\,d\theta\right\}, \quad |z| < 1; \tag{14}$$

*при этом вес $p(\theta)$ эквивалентен непрерывной функции с модулем непрерывности*

$$\omega(\delta) \leqslant C_7 \int_0^{4\delta} \frac{dz}{z}\int_0^{z} y^{-3/2}\omega_2(y)\,dy. \tag{15}$$

Следует отметить, что если выполняется условие

$$\omega_2(\delta) \leqslant C_8 \delta^{1/2} |\lg \delta|^{-\alpha-3}, \quad \alpha > 0, \tag{16}$$

то вес удовлетворяет условию Дини — Липшица и асимптотическая формула, справедливая во всей замкнутой области $|z| \leqslant 1$, вытекает из результатов С. Н. Бернштейна ([2]) и Г. Сеге ([6]). Новый результат получим в том случае, когда $\omega_2(\delta)$ при $\delta \to 0$ стремится к нулю медленнее, чем (9), например, если вместо $\alpha > 0$ положим $-1 < \alpha \leqslant 0$.

Поступило
3 XI 1952

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М., 1947. [2] С. Н. Бернштейн, О многочленах, ортогональных в конечном интервале, Харьков, 1937. [3] Я. Л. Геронимус, ДАН, **83**, № 1 (1952). [4] W. E. Sewell, Degree of Approximation by Polynomials in the Complex Domain, Princeton, 1942. [5] C. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, P., 1919. [6] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, N. Y., 1939. [7] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Math. Z., **28**, No. 4, 612 (1928). [8] M. Riesz, ibid., **27**, 218 (1927).