Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и Б. М. ЛЕВИТАН

ОБ ОДНОМ ПРОСТОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 XI 1952)

Хорошо известно, что для матрицы и для интегральных уравнений сумма собственных значений (след матрицы для интегрального уравнения) легко вычисляется. Для дифференциального уравнения

$$-y'' + [q(x) - \lambda] y = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2}$$

ряд $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$, где λ_n — собственные значения, расходится. Однако можно ввести некоторый аналог понятию следа для дифференциальных уравнений и выразить его через коэффициенты.

Заметим для этого, что если $q(x)$ дифференцируема, то имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_n = n^2 + C + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{где } C = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi q(t)\,dt + h + H\right]. \tag{3}$$

Если обозначить через μ_n собственные значения уравнения

$$-y'' - \mu y = 0 \tag{4}$$

при граничных условиях (2), то из асимптотики (3) видно, что ряд $(\lambda_1 - \mu_1) + (\lambda_2 - \mu_2) + \ldots$ сходится, если только среднее значение функций $q(x)$ равно нулю. Это условие можно считать всегда выполненным, поскольку постоянное слагаемое в $q(x)$ можно включить в λ. Целью настоящей работы является вычисление суммы $(\lambda_1 - \mu_1) + (\lambda_2 - \mu_2)$. Эта сумма является аналогом разности следов для операторов (1) и (4). Результат работы очень прост и дается следующей теоремой.

Теорема. *Рассмотрим уравнение*

$$-y'' + q(x) y = \lambda y \tag{1'}$$

при граничных условиях (2) *и предположим, что* $\int_0^\pi q(x)\,dx = 0$. *Обозначим через* λ_n *собственные значения уравнения* (1), *а через* μ_n — *соб-*

ственные значения уравнения (4) *с теми же граничными условиями. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\mu_n)=\frac{1}{4}[q(0)+q(\pi)]+hH.$$

Доказательству этой теоремы предпошлем следующие леммы.

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\mu_n)=\lim_{\zeta\to+\infty}\zeta^2\sum_{n=1}^{\infty}[(\zeta+\mu_n)^{-1}-(\zeta+\lambda_n)^{-1}]. \tag{5}$$

Доказательство. Легко проверить, что $\zeta^2[(\zeta+\mu_n)^{-1}-(\zeta+\lambda_n)^{-1}]\to\to(\lambda_n-\mu_n)$ при $\zeta\to+\infty$.

С другой стороны, абсолютная сходимость ряда $\Sigma(\lambda_n-\mu_n)$ (следующая, в силу условий теоремы, из асимптотики (3)) позволяет в равенстве (5) перейти к пределу под знаком суммы.

Лемма 2. *Обозначим через* $G(x, y, \zeta)$ *обратный оператор (т. е. функцию Грина) уравнения* $-y''+[q(x)+\zeta]y$ *при условиях* (2). *Через* $G_0(x, y, \zeta)$ *обозначим фукцию Грина для того же уравнения с* $q(x)\equiv 0$ *(уравнение* (4)). *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\mu_n)=\lim_{\zeta\to+\infty}\zeta^2\left\{\int_0^{\pi}G_0(x, x, \zeta)\,dx-\int_0^{\pi}G(x, x, \zeta)\,dx\right\}. \tag{6}$$

Доказательство. Так как λ_n суть собственные значения оператора $-y''+q(x)y$, то $\lambda_n+\zeta$ — собственные значения оператора $-y''+[q(x)+\zeta]y$. Значит, обратный оператор (т. е. ядро $G(x, y, \zeta)$) имеет собственные значения $(\lambda_n+\zeta)^{-1}$. Так как, в силу асимптотики (3), ряд $\Sigma(\lambda_n+\zeta)^{-1}$ сходится и ядро $G(x, y, \zeta)$ имеет след, то имеет место равенство $\Sigma(\lambda_n+\zeta)^{-1}=\int_0^{\pi}G(x, x, \zeta)\,dx$ и, аналогично, $\Sigma(\mu_n+\zeta)^{-1}=\int_0^{\pi}G_0(x, x, \zeta)\,dx$. Поэтому равенство (8) следует непосредственно из леммы 1.

Итак, вычисление суммы $\Sigma(\lambda_n-\mu_n)$, составляющее предмет настоящей статьи, сводится к изучению асимптотического поведения резольвенты $G(x, y, \zeta)$ при $\zeta\to+\infty$. Для упрощения дальнейших вычислений разберем случай $h=H=0$, т. е. граничных условий $y'(0)=y'(\pi)=0$. Построим функцию Грина уравнения (1) с этими граничными условиями:

$$G(x, y, \zeta)=\begin{cases}\dfrac{1}{W(\zeta)}u(x, \zeta)v(y, \zeta), & x<y,\\[2mm] \dfrac{1}{W(\zeta)}u(y, \zeta)v(x, \zeta), & x>y,\end{cases}$$

где $u(x, \zeta)$, соответственно $v(x, \zeta)$, суть решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $u(0, \zeta)=1$, $u'(0, \zeta)=0$; $v(\pi, \zeta)=1$, $v'(\pi, \zeta)=0$, а $W(\zeta)=-u(x, \zeta)v'(x, \zeta)+u'(x, \zeta)v(x, \zeta)$. Поэтому

$$\int_0^{\pi}G(x, x, \zeta)\,dx=\frac{1}{W(\zeta)}\int_0^{\pi}u(x, \zeta)v(x, \zeta)\,dx.$$

Для того чтобы вычислить правую часть последнего равенства, положим сначала в выражении для $W(\zeta)$ $x=\pi$. Мы получим

$W(\zeta) = u'_x(\pi, \zeta)$. Затем интеграл в правой части вычисляется обычными методами*. Окончательно получаем

$$\int_0^\pi G(x, x, \zeta)\, dx = \frac{1}{u'_x(\pi, \zeta)} \frac{d}{d\zeta} u'_x(\pi, \zeta) = \frac{d}{d\zeta} \ln u'_x(\pi, \zeta).$$

Таким образом, из леммы 2 непосредственно следует

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \lim_{\zeta \to \infty} \zeta^2 \left[\frac{d}{d\zeta} \ln u_{0x}(\pi, \zeta) - \frac{d}{d\zeta} \ln u'_x(\pi, \zeta)\right],$$

где $u(x, \zeta)$ — *решение уравнения* $-u'' + (q(x) + \zeta) u = 0$ *с начальными условиями* $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, *а* $u_0(x, \zeta)$ — *аналогичное решение для* $q(x) \equiv 0$ (*т. е.* $u_0(x, \zeta) = \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} x$).

Вычислим теперь асимптотическое поведение $u'_x(\pi, \zeta)$ при $\zeta \to +\infty$. Как известно [1], имеет место представление

$$u(x, \zeta) = \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} x + \int_0^x K(x, t) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} t\, dt, \tag{7}$$

де функция $K(x, t)$ удовлетворяет уравнению и условиям

$$K''_{xx}(x, t) - q(x) K(x, t) = K''_{tt}(x, t), \quad K'_t(x, 0) = 0, \quad K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t)\, dt. \tag{8}$$

Дифференцируя (7) по x, полагая затем $x = \pi$, получаем

$$u'_x(\pi, \zeta) = \sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \pi \sqrt{\zeta} + \int_0^\pi K'_x(\pi, t) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} t\, dt + K(\pi, \pi) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} \pi.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как, в силу последнего из равенств (8) и условий теоремы, имеем $K(\pi, \pi) = 0$.

Поэтому

$$-\ln \frac{u'_x(\pi, \zeta)}{u'_{0x}(\pi, \zeta)} = -\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\zeta} \operatorname{sh} \pi \sqrt{\zeta}} \int_0^\pi K'_x(\pi, t) \operatorname{ch} \sqrt{\zeta} t\, dt\right).$$

Положим $\zeta = z^2$. В последней формуле нас интересует поведение правой части при $\zeta \to +\infty$. Отбрасывая члены порядка $e^{-\pi z}$, получаем

$$-\ln \frac{u'_x(\pi, \zeta)}{u'_{0x}(\pi, \zeta)} = -\ln \left[1 + \frac{1}{z} \int_0^\pi e^{z(t-\pi)} K'_x(\pi, t)\, dt + O(e^{-\pi z})\right],$$

и, значит,

$$-\frac{d}{d\zeta} \ln \frac{u'_x(\pi, \zeta)}{u'_{0x}(\pi, \zeta)} = -\frac{1}{2z} \frac{d}{dz} \ln \left[1 + \frac{1}{z} \int_0^\pi e^{z(t-\pi)} K'_x(\pi, t)\, dt + O(e^{-\pi z})\right] =$$

$$= \frac{1}{2z^3} \int_0^\pi K'_x(\pi, t) e^{z(t-\pi)}\, dt - \frac{1}{2z^2} \int_0^\pi K'_x(\pi, t) e^{z(t-\pi)} (t - \pi)\, dt + \text{мал. высш. порядка.}$$

---

* А именно, вычисляем сначала $\int_0^\pi u(x, \zeta) v(x, \zeta_1)\, dx$ тем же приемом, которым доказывается ортогональность собственных функций. Нужный нам интеграл получается предельным переходом при $\zeta_1 \to \zeta$.

Нетрудно увидеть, что мы не изменим порядка каждого из двух последних интегралов, если заменим в нем функцию $K'_x(\pi, t)$, стоящую под знаком интеграла, ее значением в точке $t=\pi$. Проделав эту замену, мы сможем эти интегралы вычислить, и получим окончательно

$$-\frac{d}{d\zeta}\ln\frac{u'_x(\pi, \zeta)}{u'_{0x}(\pi, \zeta)} = \frac{1}{z^4}K'_x(\pi, \pi) + O\left(\frac{1}{z^5}\right), \quad \text{где } \zeta = z^2.$$

Итак, из леммы 3 следует:

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n - \mu_n) = -\lim_{\zeta\to+\infty}\zeta^2\frac{d}{d\zeta}\ln\frac{u'_x(\pi, \zeta)}{u'_{0x}(\pi, \zeta)} = K'_x(\pi, \pi).$$

Для того чтобы доказать сформулированную теорему, осталось вычислить $K'_x(\pi, \pi)$. Используем уравнение и граничные условия (8). Положим $x = \xi + \eta$, $y = \xi - \eta$ и обозначим $\widetilde{K}(\xi, \eta) = K(x, t) = K(\xi+\eta, \xi-\eta)$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\widetilde{K}''_{\xi\eta}(\xi, \eta) = q(\xi+\eta)\widetilde{K}(\xi, \eta), \tag{9}$$

а граничные условия (8) запишутся так:

$$\widetilde{K}'_{\xi}(\xi, \xi) - \widetilde{K}'_{\eta}(\xi, \xi) = 0, \quad \widetilde{K}(\xi, 0) = \frac{1}{2}\int_0^{\xi} q(t)\,dt. \tag{10}$$

Вычислим $K'_x(\pi, \pi) = {}^1/_2[\widetilde{K}'_{\xi}(\pi, 0) + \widetilde{K}'_{\eta}(\pi, 0)]$. Из условий (10) имеем

$$\widetilde{K}'_{\xi}(\pi, 0) = {}^1/_2\, q(\pi).$$

Положим в уравнении (9) $\eta = 0$ и проинтегрируем его по ξ от 0 до π. Получим:

$$\widetilde{K}'_{\eta}(\pi, 0) - \widetilde{K}'_{\eta}(0, 0) = \int_0^{\pi} q(\tau)\widetilde{K}(\tau, 0)\,d\tau.$$

С помощью первого и второго из условий (10) получаем

$$0 = \widetilde{K}'_{\xi}(0, 0) - \widetilde{K}'_{\eta}(0, 0) = {}^1/_2\, q(0) - \widetilde{K}'_{\eta}(0, 0).$$

Итак,

$$\widetilde{K}'_{\eta}(\pi, 0) = \frac{1}{2}q(0) + \int_0^{\pi}\widetilde{K}(\tau, 0)q(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}q(0) + 2\int_0^{\pi}\widetilde{K}(\tau, 0)\,d\widetilde{K}(\tau, 0) =$$

$$= \frac{1}{2}q(0) + [\widetilde{K}(\pi, 0)]^2 = \frac{1}{2}q(0),$$

так как $\widetilde{K}(\pi, 0) = \widetilde{K}(\pi, \pi) = \int_0^{\pi} q(t)\,dt = 0$.

Окончательно имеем

$$K'_x(\pi, \pi) = {}^1/_2[\widetilde{K}'_{\xi}(\pi, 0) + \widetilde{K}'_{\eta}(\pi, 0)] = {}^1/_4[q(\pi) + q(0)],$$

что в соединении с леммой 4 доказывает теорему при граничных условиях $y'(0) = y'(\pi) = 0$. При общих граничных условиях теорема доказывается аналогично.

Поступило
28 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Е. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 309 (1951).