Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

УСЛОВИЕ, НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ЧЕТНАЯ НЕУБЫВАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ БЫЛА ВЕСОВОЙ

1. В настоящей заметке доказывается следующая теорема:

Теорема А. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы четная неубывающая функция* $\Phi(x)>0$ $(-\infty<x<\infty)$ *была весовой, состоит в том, что бесконечна верхняя грань сумм*

$$\sum_{1}^{n}{}' \frac{\beta_{k,n}}{\alpha_{k,n}^2+\beta_{k,n}^2}=\frac{1}{M_n} \quad (\beta_{k,n}\geqslant 0,\ \alpha_{k,n}^2+\beta_{k,n}^2>0), \tag{1}$$

где $\alpha_{k,n}\pm i\beta_{k,n}$ — *корни произвольно взятых четных многочленов* $R_n(x)$ *любой степени* n, *удовлетворяющих условию*

$$|R_n(x)|\leqslant\Phi(x) \tag{2}$$

(*нормированных каким-нибудь условием* $R_n(0)\geqslant c\Phi(0)$, $0\leqslant c\leqslant 1$).

Докажем сначала, что наше условие необходимо, т. е. что функция $\Phi(x)$ не может быть весовой, если

$$\sup\frac{1}{M_n}=\frac{1}{M}<\infty. \tag{3}$$

Можем принять, для сокращения письма, что

$$\Phi(x)=1 \tag{4}$$

на некотором данном отрезке $[-a,\ a]$.

Итак, допустим, что существует функция $F(x)$ $\left(\lim\limits_{x=\pm\infty}\dfrac{F(x)}{\Phi(x)}=0\right)$, для которой при всяком $\varepsilon>0$ найдутся многочлены $P(x,\varepsilon)$, удовлетворяющие неравенству

$$|F(x)-P(x,\varepsilon)|<\varepsilon\Phi(x) \quad (-\infty<x<+\infty). \tag{5}$$

Пусть $F(x)$ удовлетворяет также условию

$$B<F(x)\leqslant A\Phi(x) \quad (-\infty<x<+\infty), \tag{6}$$

где $1/2<B<A<1$. Тогда для достаточно малых ε $(A+\varepsilon<1)$ имеем

$$|P(x,\varepsilon)|<\Phi(x) \quad (-\infty<x<\infty) \tag{7}$$

и (вследствие (4))

$$1/3<1/2-\varepsilon<P(x,\varepsilon)<1 \quad (-a\leqslant x\leqslant a). \tag{8}$$

Пусть теперь $-a \leqslant x_0 \leqslant a$. Вследствие (7)

$$\left| P\left(\frac{x \pm x_0}{2}, \varepsilon\right)\right| < \Phi\left(\frac{x \pm x_0}{2}\right) \leqslant \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{9}$$

так как $\left|\frac{x \pm x_0}{2}\right| < |x|$ при $|x| > a \geqslant x_0$, а при $|x| \leqslant a$ имеем (благодаря (4)) $\Phi\left(\frac{x \pm x_0}{2}\right) = \Phi(x) = 1$. Следовательно, полагая

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[P\left(\frac{x_0 + x}{2}, \varepsilon\right) + iP\left(\frac{x_0 - x}{2}, \varepsilon\right)\right], \tag{10}$$

находим, что многочлен $R_{n,x_0}(x)$, степень которого n (зависящая от ε) достаточно велика, удовлетворяет неравенству

$$|R_{n,x_0}(x)| = \sqrt{\frac{1}{2}\left[P^2\left(\frac{x_0 + x}{2}, \varepsilon\right) + P^2\left(\frac{x_0 - x}{2}, \varepsilon\right)\right]} < \Phi(x) \tag{11}$$
$$(-\infty < x < \infty)$$

при любом x_0 $(-a \leqslant x_0 < a)$. Но, с другой стороны, вследствие (10) имеем также $(-\infty < x < \infty)$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}} P\left(\frac{x_0 + x}{2}, \varepsilon\right)\right| \leqslant |R_{n,x_0}(x)| = \left|\frac{s(x) + it(x)}{\sqrt{2}}\right|, \tag{12}$$

разлагая на сопряженные множители четный многочлен

$$P^2\left(\frac{x_0 + x}{2}, \varepsilon\right) + P^2\left(\frac{x_0 - x}{2}, \varepsilon\right) = 2\,(s(x) + it(x))\,(s(x) - it(x))$$

так, чтобы все корни $\alpha_k + i\beta_k$ (которые являются функциями ε, x_0, n) многочлена $s(x) + it(x)$ степени n лежали в верхней полуплоскости. Кроме того, вследствие (11), имеем, согласно предположению (3),

$$\sum_1^n \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \leqslant \frac{1}{M} \quad (\beta_k \geqslant 0), \tag{3$^{\text{bis}}$}$$

причем (для краткости пишем $P(x)$ вместо $P(x, \varepsilon)$)

$$s(x) + it(x) = P\left(\frac{x_0}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{\alpha_k + i\beta_k}\right). \tag{13}$$

Таким образом, применяя известную теорему (3) (стр. 139) о максимуме производной к неравенству (12), находим, полагая $x = 0$:

$$\frac{1}{2}\left|P'\left(\frac{x_0}{2}, \varepsilon\right)\right| \leqslant |s'(0) + it'(0)| = P\left(\frac{x_0}{2}\right)\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k + i\beta_k}\right| = P\left(\frac{x_0}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \tag{14}$$

(учитывая, что всякому корню $\alpha_k + i\beta_k$ при $\alpha_k \gtrless 0$ соответствует другой корень $\alpha_l + i\beta_l$, где $\alpha_l = -\alpha_k$, $\beta_l = \beta_k$). Принимая во внимание (8), заключаем из (14) и (3$^{\text{bis}}$), что

$$|P'(x, \varepsilon)| \leqslant 2\sum_1^n \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \leqslant \frac{2}{M} \tag{15}$$

при всех значениях x на отрезке $[-a/2, a/2]$. Поэтому функция $F(x)$, удовлетворяющая (5), *удовлетворяет условию Липшица*

$$|F(x + h) - F(x)| \leqslant \frac{2}{M} h \quad \left(-\frac{a}{2} \leqslant x < x + h \leqslant \frac{a}{2}\right), \tag{16}$$

т. е. не может быть произвольной непрерывной функцией на $[-a/2, a/2]$ и, следовательно, $\Phi(x)$ не является весовой функцией.

Что касается достаточности высказанного в теореме условия, то она доказана, по существу, в моей монографии [1] (стр. 145—146); только там на (опорные) многочлены $R_n(x)$, удовлетворяющие (2), наложено ограничение, что их коэффициенты вещественны. Однако легко видеть, что доказательство остается в силе и без этого ограничения, если воспользоваться вместо неравенства (23) [1] ($E^{(2n)}_{R_{2n}(x)}|x| < \frac{1}{2}M$, где $R_{2n}(x) \geqslant 0$ (стр. 145)), основным неравенством (16) [3] (стр. 141) (частным случаем которого является упомянутое неравенство (23) [1]) $E^{(n)}_{\sqrt{R_{2n}(x)}}|x| < M$ $(\sqrt{R_{2n}(x)} = |R_n(x)|)$.

2. Доказанной нами теореме эквивалентна

Теорема А*. *Для того, чтобы четная неубывающая функция $\Phi(x) > 0$ $(-\infty < x < \infty)$ была весовой, необходимо и достаточно, чтобы у четных многочленов $R_n(x)$ $(R_n(0) \geqslant c\Phi(0))$, удовлетворяющих* (2), *была бесконечна верхняя грань значений*

$$L_n = \int_0^\infty \frac{\log|R_n(x)/R_n(0)|}{x^2}\,dx.$$

Для доказательства достаточно показать, что, каков бы ни был четный (действительный) многочлен $R(x) \geqslant 0$ $(R(0) = 1)$, имеем тождественно

$$\int_0^\infty \frac{\log R(x)}{x^2}\,dx = \pi \sum \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \qquad (\beta_k > 0), \tag{17}$$

где $R(x) = e^{p(x)} = \Pi\left(1 + \frac{x^2}{b_k^2}\right)$, полагая, как в [1] (стр. 148), $b_k = \beta_k - i\alpha_k$, причем, если $\alpha_k \gtreqless 0$, то будет также сопряженное $\bar{b}_k = \beta_k + i\alpha_k$.

Интегрируя по частям левую часть (17), получим

$$\int_0^\infty \frac{\log R(x)}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{p(x)}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{p'(x)}{x}\,dx = 2\sum \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + b_k^2}. \tag{18}$$

Но $\int_0^x \frac{dx}{x^2 + b_k^2} = \frac{1}{b_k}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b_k}$; так что, полагая сначала $\alpha_k = 0$, имеем $2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + b_k^2} = \frac{\pi}{b_k}$, причем, учитывая, что обе части последнего равенства являются аналитическими функциями комплексной переменной $b_k = \beta_k - i\alpha_k$ (регулярными при $\beta_k > 0$), заключаем, что оно остается в силе для любых $\alpha_k \gtreqless 0$. Таким образом, соединяя попарно сопряженные члены, соответствующие b_k и $\bar{b}_k$, получим из (18) формулу (17).

Следствие 1. *Для того чтобы четная неубывающая функция $\Phi(x) > 0$ была весовой, необходимо и достаточно, чтобы неравенство*

$$|P(x)| < \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{7$^{\text{bis}}$}$$

где $P(x)$ — многочлен (сколь угодно высокой степени), было совместимо в любом данном промежутке (a, b) с неравенством

$$\sup_{a<x<b} |P'(x)| > N,$$

как бы велико ни было N.

В самом деле, необходимость очевидна. Достаточность вытекает из доказательства (неравенство (15)) теоремы А.

С л е д с т в и е 2 (Н. И. Ахиезера и К. И. Бабенко ([2])). *Если четная неубывающая функция* $\Phi(x) > 0$ *удовлетворяет условию* *

$$\int_1^{\infty} \frac{\log \Phi(x)\, dx}{x^2} \leqslant L < \infty, \tag{19}$$

то функция $\Phi(x)$ *не может быть весовой.*

Действительно, полагая $\Phi(x) = 1$ при $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, видим, что все четные многочлены, удовлетворяющие условию

$$|R(x)| \leqslant \Phi(x)(1 + x^2) \quad (R(0) = 1), \tag{20}$$

подчиняются условию

$$\int_0^{\infty} \frac{\log R(x)\, dx}{x^2} \leqslant L + \int_0^1 \frac{\log(1 + x^2)}{x^2}\, dx = L + \frac{\pi}{2} + \log 2,$$

так что по теореме А* функция $\Phi(x)$ не будет весовой.

Легко видеть, что вытекающее из следствия 2 необходимое условие

$$\int_1^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{x^2}\, dx = \infty \tag{21}$$

для того, чтобы четная неубывающая функция $\Phi(x) > 0$ была весовой, н е я в л я е т с я, в о о б щ е, д о с т а т о ч н ы м.

Действительно, пусть неубывающая четная функция $\Phi(x) > 0$, удовлетворяющая (21), обладает свойством, что существует целое число $m > 0$, для которого

$$\lambda_m = \inf_{1 < x < \infty} \frac{\sqrt[m]{\Phi(x)}}{x} = 0. \tag{22}$$

В таком случае ясно, что все многочлены $R_n(x)$, удовлетворяющие (2), должны быть степени $n < m$.

Таким образом, согласно теореме А* функция $\Phi(x)$, пример которой легко построить, удовлетворяющая условиям (21) и (22), н е м о ж е т б ы т ь в е с о в о й.

Поступило
10 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Б е р н ш т е й н, Экстремальные свойства полиномов, 1937. [2] Н. И. А х и е з е р, К. И. Б а б е н к о, ДАН, 57, № 4 (1947). [3] М. М. Д ж р б а ш я н, ДАН, 84, № 1 (1952). [4] L e n n a r t C a r l e s o n, Proc. Am. Math. Soc., 2, December (1951).

* В письме ко мне (отправленном из Еревана 28 VIII 1952) М. М. Джрбашян сообщил, что ему удалось установить теорему о максимуме производной многочлена $P(x)$ при неравенстве $|P(x)| < \Phi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, где $\Phi(x) > 0$ — л ю б а я неубывающая четная функция, удовлетворяющая (19) (ранее в заметке ([3]) он вводил дополнительное предположение, что $\Phi(x)$ возрастает н о р м а л ь н о). Впервые формулированное выше следствие 2 было доказано в 1947 г. в заметке ([2]) Н. И. Ахиезера и К. И. Бабенко без ограничения монотонности и четности $\Phi(x)$. Аналогичный результат вновь получен в недавней статье Л. Карлесона ([4]). Прибавлю, наконец, что теорем, эквивалентных моим теоремам А, А* и следствию 1, нет ни у одного из названных авторов.