

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

**УСЛОВИЕ, НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ ДЛЯ ТОГО,
ЧТОБЫ ЧЕТНАЯ НЕУБЫВАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ БЫЛА ВЕСОВОЙ**

1. В настоящей заметке доказывается следующая теорема:

Теорема А. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы четная неубывающая функция $\Phi(x) > 0$ ($-\infty < x < \infty$) была весовой, состоит в том, что бесконечна верхняя грань сумм

$$\sum_1^n \frac{\beta_{k,n}}{\alpha_{k,n}^2 + \beta_{k,n}^2} = \frac{1}{M_n} \quad (\beta_{k,n} \geq 0, \alpha_{k,n}^2 + \beta_{k,n}^2 > 0), \quad (1)$$

где $\alpha_{k,n} \pm i\beta_{k,n}$ — корни произвольно взятых четных многочленов $R_n(x)$ любой степени n , удовлетворяющих условию

$$|R_n(x)| \leq \Phi(x) \quad (2)$$

(нормированных каким-нибудь условием $R_n(0) \geq c\Phi(0)$, $0 \leq c \leq 1$).

Докажем сначала, что наше условие необходимо, т. е. что функция $\Phi(x)$ не может быть весовой, если

$$\sup \frac{1}{M_n} = \frac{1}{M} < \infty. \quad (3)$$

Можем принять, для сокращения письма, что

$$\Phi(x) = 1 \quad (4)$$

на некотором данном отрезке $[-a, a]$.

Итак, допустим, что существует функция $F(x) \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{F(x)}{\Phi(x)} = 0 \right)$, для которой при всяком $\varepsilon > 0$ найдутся многочлены $P(x, \varepsilon)$, удовлетворяющие неравенству

$$|F(x) - P(x, \varepsilon)| < \varepsilon \Phi(x) \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (5)$$

Пусть $F(x)$ удовлетворяет также условию

$$B < F(x) \leq A\Phi(x) \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (6)$$

где $1/2 < B < A < 1$. Тогда для достаточно малых ε ($A + \varepsilon < 1$) имеем

$$|P(x, \varepsilon)| < \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (7)$$

и (вследствие (4))

$$1/3 < 1/2 - \varepsilon < P(x, \varepsilon) < 1 \quad (-a \leq x \leq a). \quad (8)$$

Пусть теперь $-a \leq x_0 \leq a$. Вследствие (7)

$$\left| P\left(\frac{x \pm x_0}{2}, \varepsilon\right) \right| < \Phi\left(\frac{x \pm x_0}{2}\right) \leq \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (9)$$

так как $\left|\frac{x \pm x_0}{2}\right| < |x|$ при $|x| > a \geq x_0$, а при $|x| \leq a$ имеем (благодаря (4)) $\Phi\left(\frac{x \pm x_0}{2}\right) = \Phi(x) = 1$. Следовательно, полагая

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[P\left(\frac{x_0+x}{2}, \varepsilon\right) + iP\left(\frac{x_0-x}{2}, \varepsilon\right) \right], \quad (10)$$

находим, что многочлен $R_{n,x_0}(x)$, степень которого n (зависящая от ε) достаточно велика, удовлетворяет неравенству

$$|R_{n,x_0}(x)| = \sqrt{\frac{1}{2} \left[P^2\left(\frac{x_0+x}{2}, \varepsilon\right) + P^2\left(\frac{x_0-x}{2}, \varepsilon\right) \right]} < \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (11)$$

при любом x_0 ($-a \leq x_0 \leq a$). Но, с другой стороны, вследствие (10) имеем также ($-\infty < x < \infty$)

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} P\left(\frac{x_0+x}{2}, \varepsilon\right) \right| \leq |R_{n,x_0}(x)| = \left| \frac{s(x) + it(x)}{\sqrt{2}} \right|, \quad (12)$$

разлагая на сопряженные множители четный многочлен

$$P^2\left(\frac{x_0+x}{2}, \varepsilon\right) + P^2\left(\frac{x_0-x}{2}, \varepsilon\right) = 2(s(x) + it(x))(s(x) - it(x))$$

так, чтобы все корни $\alpha_k + i\beta_k$ (которые являются функциями ε, x_0, n) многочлена $s(x) + it(x)$ степени n лежали в верхней полуплоскости. Кроме того, вследствие (11), имеем, согласно предположению (3),

$$\sum_1^n \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \leq M \quad (\beta_k \geq 0), \quad (3^{bis})$$

причем (для краткости пишем $P(x)$ вместо $P(x, \varepsilon)$)

$$s(x) + it(x) = P\left(\frac{x_0}{2}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{\alpha_k + i\beta_k}\right). \quad (13)$$

Таким образом, применяя известную теорему (3) (стр. 139) о максимуме производной к неравенству (12), находим, полагая $x = 0$:

$$\frac{1}{2} \left| P'\left(\frac{x_0}{2}, \varepsilon\right) \right| \leq |s'(0) + it'(0)| = P\left(\frac{x_0}{2}\right) \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k + i\beta_k} \right| = P\left(\frac{x_0}{2}\right) \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (14)$$

(учитывая, что всякому корню $\alpha_k + i\beta_k$ при $\alpha_k \geq 0$ соответствует другой корень $\alpha_l + i\beta_l$, где $\alpha_l = -\alpha_k, \beta_l = \beta_k$). Принимая во внимание (8), заключаем из (14) и (3^{bis}), что

$$|P'(x, \varepsilon)| \leq 2 \sum_1^n \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \leq \frac{2}{M} \quad (15)$$

при всех значениях x на отрезке $[-a/2, a/2]$. Поэтому функция $F(x)$, удовлетворяющая (5), удовлетворяет условию Липшица

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \frac{2}{M} h \quad \left(-\frac{a}{2} \leq x < x+h \leq \frac{a}{2}\right), \quad (16)$$

т. е. не может быть произвольной непрерывной функцией на $[-a/2, a/2]$ и, следовательно, $\Phi(x)$ не является весовой функцией.

Что касается достаточности высказанного в теореме условия, то она доказана, по существу, в моей монографии ⁽¹⁾ (стр. 145—146); только там на (опорные) многочлены $R_n(x)$, удовлетворяющие (2), наложено ограничение, что их коэффициенты вещественны. Однако легко видеть, что доказательство остается в силе и без этого ограничения, если воспользоваться вместо неравенства (23) ⁽¹⁾ $(E_{R_{2n}(x)}^{(2n)} |x| < < 1/2 M$, где $R_{2n}(x) \geq 0$ (стр. 145)), основным неравенством (16) ⁽³⁾ (стр. 141) (частным случаем которого является упомянутое неравенство (23) ⁽¹⁾) $E_{\sqrt{R_{2n}(x)}}^{(n)} |x| < M$ ($\sqrt{R_{2n}(x)} = |R_n(x)|$).

2. Доказанной нами теореме эквивалентна

Теорема А*. Для того, чтобы четная неубывающая функция $\Phi(x) > 0$ ($-\infty < x < \infty$) была весовой, необходимо и достаточно, чтобы у четных многочленов $R_n(x)$ ($R_n(0) \geq c\Phi(0)$), удовлетворяющих (2), была бесконечна верхняя грань значений

$$L_n = \int_0^{\infty} \frac{\log |R_n(x)/R_n(0)|}{x^2} dx.$$

Для доказательства достаточно показать, что, каков бы ни был четный (действительный) многочлен $R(x) \geq 0$ ($R(0) = 1$), имеем тождественно

$$\int_0^{\infty} \frac{\log R(x)}{x^2} dx = \pi \sum \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (\beta_k > 0), \quad (17)$$

где $R(x) = e^{p(x)} = \prod \left(1 + \frac{x^2}{b_k^2}\right)$, полагая, как в ⁽¹⁾ (стр. 148), $b_k = \beta_k - i\alpha_k$,

причем, если $\alpha_k \geq 0$, то будет также сопряженное $b_k = \beta_k + i\alpha_k$.

Интегрируя по частям левую часть (17), получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\log R(x)}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{p'(x)}{x} dx = 2 \sum \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + b_k^2}. \quad (18)$$

Но $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + b_k^2} = \frac{1}{b_k} \arctg \frac{x}{b_k}$; так что, полагая сначала $\alpha_k = 0$, имеем

$2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + b_k^2} = \frac{\pi}{b_k}$, причем, учитывая, что обе части последнего равенства являются аналитическими функциями комплексной переменной

$b_k = \beta_k - i\alpha_k$ (регулярными при $\beta_k > 0$), заключаем, что оно остается в силе для любых $\alpha_k \geq 0$. Таким образом, соединяя попарно сопряженные члены, соответствующие b_k и \bar{b}_k , получим из (18) формулу (17).

Следствие 1. Для того чтобы четная неубывающая функция $\Phi(x) > 0$ была весовой, необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$|P(x)| < \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (7^{bis})$$

где $P(x)$ — многочлен (сколь угодно высокой степени), было совместно в любом данном промежутке (a, b) с неравенством

$$\sup_{a < x < b} |P'(x)| > N,$$

как бы велико ни было N .

В самом деле, необходимость очевидна. Достаточность вытекает из доказательства (неравенство (15)) теоремы А.

Следствие 2 (Н. И. Ахиезера и К. И. Бабенко ⁽²⁾). Если четная неубывающая функция $\Phi(x) > 0$ удовлетворяет условию*

$$\int_1^{\infty} \frac{|\log \Phi(x)| dx}{x^2} \leq L < \infty, \quad (19)$$

то функция $\Phi(x)$ не может быть весовой.

Действительно, полагая $\Phi(x) = 1$ при $(-1 \leq x \leq 1)$, видим, что все четные многочлены, удовлетворяющие условию

$$|R(x)| \leq \Phi(x)(1+x^2) \quad (R(0) = 1), \quad (20)$$

подчиняются условию

$$\int_0^{\infty} \frac{\log R(x) dx}{x^2} \leq L + \int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx = L + \frac{\pi}{2} + \log 2,$$

так что по теореме А* функция $\Phi(x)$ не будет весовой.

Легко видеть, что вытекающее из следствия 2 необходимое условие

$$\int_1^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{x^2} dx = \infty \quad (21)$$

для того, чтобы четная неубывающая функция $\Phi(x) > 0$ была весовой, не является, вообще, достаточным.

Действительно, пусть неубывающая четная функция $\Phi(x) > 0$, удовлетворяющая (21), обладает свойством, что существует целое число $m > 0$, для которого

$$\lambda_m = \inf_{1 < x < \infty} \frac{V \overline{\Phi(x)}^m}{x} = 0. \quad (22)$$

В таком случае ясно, что все многочлены $R_n(x)$, удовлетворяющие (2), должны быть степени $n < m$.

Таким образом, согласно теореме А* функция $\Phi(x)$, пример которой легко построить, удовлетворяющая условиям (21) и (22), не может быть весовой.

Поступило
10 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937.
² Н. И. Ахиезер, К. И. Бабенко, ДАН, 57, № 4 (1947). ³ М. М. Джрбашян, ДАН, 84, № 1 (1952). ⁴ Lennart Carleson, Proc. Am. Math. Soc., 2, December (1951).

* В письме ко мне (отправленном из Еревана 28 VIII 1952) М. М. Джрбашян сообщил, что ему удалось установить теорему о максимуме производной многочлена $P(x)$ при неравенстве $|P(x)| < \Phi(x)$ ($-\infty < x < \infty$), где $\Phi(x) > 0$ — любая неубывающая четная функция, удовлетворяющая (19) (ранее в заметке ⁽³⁾ он вводил дополнительное предположение, что $\Phi(x)$ возрастает нормально). Впервые сформулированное выше следствие 2 было доказано в 1947 г. в заметке ⁽²⁾ Н. И. Ахиезера и К. И. Бабенко без ограничения монотонности и четности $\Phi(x)$. Аналогичный результат вновь получен в недавней статье Л. Карлесона ⁽⁴⁾. Прибавлю, наконец, что теорем, эквивалентных моим теоремам А, А* и следствию 1, нет ни у одного из названных авторов.