

В. А. КРАСИЛЬНИКОВ и В. И. ТАТАРСКИЙ

О ЗАВИСИМОСТИ СРЕДНЕГО КВАДРАТИЧНОГО ФЛУКТУАЦИЙ
ФАЗЫ И АМПЛИТУДЫ ОТ РАЗМЕРОВ ОБЪЕКТИВА
ПРИ НАБЛЮДЕНИИ МЕРЦАНИЯ ЗВЕЗД

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 XII 1952)

Известно, что мерцание звезд гораздо более заметно невооруженным глазом, чем при наблюдении большим объективом. Подобного рода явление имеет место также при приеме сантиметровых радиоволн антеннами, имеющими различную апертуру (1). В этой заметке мы ставим себе целью показать, что этот факт может быть объяснен усредняющим действием поверхности приемного устройства.

Запишем амплитуду колебаний в точке приемника (объектива)

$$f = \bar{a}(1 + a') e^{i(\bar{\varphi} + \varphi')}, \quad (1)$$

где a' и φ' — флуктуирующие величины со средними значениями $\bar{a}' = \bar{\varphi}' = 0$. Интегральное колебание приемника найдется интегрированием (1) по площади приемника Σ :

$$X = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_{\Sigma} \bar{a}(1 + a') e^{i(\bar{\varphi} + \varphi')} d\sigma. \quad (2)$$

Выделим из этого выражения результирующего колебания результирующую фазу и результирующую амплитуду. Для этого разложим $e^{i\varphi'}$ в ряд и ограничимся членом первого порядка относительно φ' , считая φ' малой величиной. Тогда $e^{i\varphi'} \cong 1 + i\varphi'$ и

$$X \cong \bar{a} e^{i\bar{\varphi}} \int_{\Sigma} (1 + a' + i\varphi' + i\varphi' a') d\sigma. \quad (3)$$

Считая a' также малой величиной, пренебрегаем в (3) членом $ia'\varphi'$:

$$X \cong \bar{a} e^{i\bar{\varphi}} \int_{\Sigma} (1 + a' + i\varphi') d\sigma = \bar{a} e^{i\bar{\varphi}} \int_{\Sigma} (1 + a') d\sigma \left[1 + i \frac{\int_{\Sigma} \varphi' d\sigma}{\int_{\Sigma} (1 + a') d\sigma} \right]. \quad (4)$$

Отношение $\int_{\Sigma} \varphi' d\sigma / \int_{\Sigma} (1 + a') d\sigma$ имеет тот же порядок, что и φ' , поэтому

$$1 + i \frac{\int_{\Sigma} \varphi' d\sigma}{\int_{\Sigma} (1 + a') d\sigma} \cong \exp \left[i \frac{\int_{\Sigma} \varphi' d\sigma}{\int_{\Sigma} (1 + a') d\sigma} \right], \quad (5)$$

откуда

$$X \cong \int_{\Sigma} \bar{a}(1 + a') d\sigma \exp i \left[\bar{\varphi} + \frac{\int_{\Sigma} \varphi' d\sigma}{\int_{\Sigma} (1 + a') d\sigma} \right]. \quad (6)$$

Из этого выражения мы видим, что результирующее колебание приемника имеет амплитуду

$$A = \bar{a} \int_{\Sigma} (1 + a') d\sigma \quad (7)$$

и фазу

$$\varphi = \bar{\varphi} + \frac{\int_{\Sigma} \varphi' d\sigma}{\int_{\Sigma} (1+a') d\sigma} \cong \bar{\varphi} + \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \varphi' d\sigma. \quad (8)$$

На основании (7) и (8) получим:

$$\overline{(A-A)^2} = (\bar{a})^2 \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \overline{a'(y,z) a'(y',z')} d\sigma d\sigma', \quad (9)$$

$$\overline{(\varphi - \bar{\varphi})^2} = \frac{1}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \overline{\varphi'(y,z) \varphi'(y',z')} d\sigma d\sigma', \quad (10)$$

где y и z — оси координат, лежащие в плоскости приемника, и ось x ей перпендикулярна (распространение плоской гармонической волны происходит в направлении $-x$). Для a' и φ' мы имеем выражения (2, 3):

$$a'(y, z) = -\frac{1}{4} \int_0^L (L-x) \left[\frac{\partial^2 \varepsilon'(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon'(x, y, z)}{\partial z^2} \right] dx, \quad (11)$$

$$\varphi' = \frac{\omega}{c} S' = \frac{\omega}{2c} \int_0^L \varepsilon'(x, y, z) dx. \quad (12)$$

Здесь L — расстояние, проходимое волной в турбулентной атмосфере; ε' — отклонение от среднего диэлектрического коэффициента; ω — круговая частота радиации; c — скорость света и S' — непостоянство оптической длины пути (рассмотрение вопроса ведется в рамках геометрической оптики).

На основании (9) получим: $\overline{(A-A)^2} = (\bar{a})^2 I_1$, где

$$I_1 = \frac{1}{16} \int_V \int_V (L-x)(L-x') \left[\frac{\partial^2 \varepsilon'(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon'(x, y, z)}{\partial z^2} \right] \times \\ \times \left[\frac{\partial^2 \varepsilon'(x', y', z')}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon'(x', y', z')}{\partial z'^2} \right] dV dV'. \quad (13)$$

Для простоты вычислений будем считать, что поверхность приемника имеет форму квадрата со стороной h . Кроме того, положим, что функция корреляции между пульсациями температуры* имеет вид

$$f(\rho/l) = \bar{T}^2 e^{-(\rho/l)^2}, \quad (14)$$

где ρ — расстояние между точками наблюдения; l — масштаб корреляции между пульсациями температуры, т. е. расстояние, на котором корреляция ослабевает в e раз, и \bar{T} — абсолютная температура.

При этих условиях громоздкие, но по существу несложные вычисления средних квадратичных амплитуды и фазы (9) и (10) приводят к выражениям (при $L \gg l$);

$$\overline{(A-A)^2} = \frac{V\pi}{6} (\bar{a})^2 \bar{T}^2 \gamma^2 L^3 l \left\{ (1 - e^{-h^2/l^2})^2 + \right. \\ \left. + \left[1 + \left(2 \left(\frac{h}{l} \right)^2 - 1 \right) e^{-h^2/l^2} \right] \left[V\pi \frac{h}{l} \Phi \left(\frac{h}{l} \right) + e^{-h^2/l^2} - 1 \right] \right\}, \quad (15)$$

$$\overline{(\varphi - \bar{\varphi})^2} = \frac{V\pi}{4} \bar{T}^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 L l \gamma^2 \frac{\left[\frac{h}{l} V\pi \Phi \left(\frac{h}{l} \right) + e^{-(h/l)^2} - 1 \right]^2}{(h/l)^4}, \quad (16)$$

где $\gamma = Kp / (\bar{T})^2$ ($K = 2 \cdot 10^{-4}$, p — атмосферное давление в мм рт. ст.) и

$$\Phi(mx) = \frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-m^2 t^2} dt \quad \text{интеграл вероятности.}$$

* Флуктуации коэффициента преломления, вызванные атмосферной турбулентностью, вызываются для света, как известно, в основном полем температурных пульсаций (3).

При малых $h \ll l$

$$\overline{(A - \bar{A})^2} \cong \frac{V\pi}{6} (\bar{a})^2 h^4 \bar{T}^2 \gamma^2 \left(\frac{L}{l}\right)^3 \left(1 - \frac{h^2}{l^2}\right), \quad (17)$$

$$\overline{(\varphi - \bar{\varphi})^2} \cong \frac{V\pi}{4} \bar{T}^2 \gamma^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Ll \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h^2}{l^2}\right). \quad (18)$$

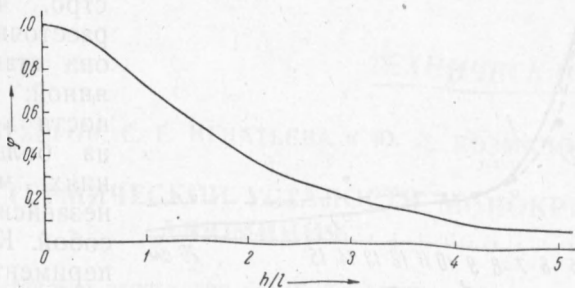


Рис. 1. $\varphi = \frac{\left[V\pi \frac{h}{l} \Phi\left(\frac{h}{l}\right) + e^{-(h/l)^2} - 1 \right]^2}{(h/l)^4}$; $\Phi\left(\frac{h}{l}\right) = \frac{2}{V\pi} \int_0^{h/l} e^{-t^2} dt$

При $h \gg l$

$$\overline{(\varphi - \bar{\varphi})^2} \cong \frac{\pi V\pi}{4} \bar{T}^2 \gamma^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Ll^3 \frac{1}{\Sigma}, \quad (19)$$

т. е. $\overline{(\varphi - \bar{\varphi})^2}$ убывает как $1/\Sigma$, и

$$\overline{(A - \bar{A})^2} \cong \frac{\pi}{3} (\bar{a})^2 \bar{T}^2 \gamma^2 L^3 h. \quad (20)$$

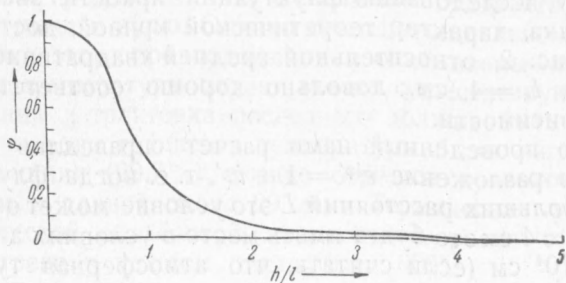


Рис. 2. $\psi = \frac{(1 - e^{-x^2})^2 + [1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2}] [V\pi x \Phi(x) + e^{-x^2} - 1]}{4x^4}$; $x = \frac{h}{l}$

В случае распространения света масштабом корреляции l является внутренний масштаб l_b , который для условий атмосферы имеет величину порядка сантиметра.

На рис. 1 представлена зависимость $\overline{(\varphi - \bar{\varphi})^2}$ от h , построенная по формуле (16), и на рис. 2 — зависимость от h величины $\frac{\overline{(A - \bar{A})^2}}{A^2}$ — относительной средней квадратичной флуктуации амплитуды; эта кривая построена при помощи формулы (15).

Данжон и Кудэ⁽⁴⁾ наблюдали величины углов прихода от звезды при помощи интерференционного приспособления. Два исходящих от одной звезды пучка лучей с поперечным сечением в несколько квадратных сантиметров, приходящих к объективу, интерфери-

руют между собой. Расстояние между этими пучками изменялось авторами от 0 до некоторого значения x . Эти авторы установили, что при возрастании x случайная максимальная разность хода пропорциональна x до некоторого значения (~ 10 см), после чего разность возрастает менее быстро, чем x , и для расстояния $x = 20$ см она становится постоянной; колебания разности хода двух лучей на больших расстояниях можно считать независимыми между собой. Как видим, экспериментальные данные Данжона и Кудэ находятся в соответствии с нашими расчетами

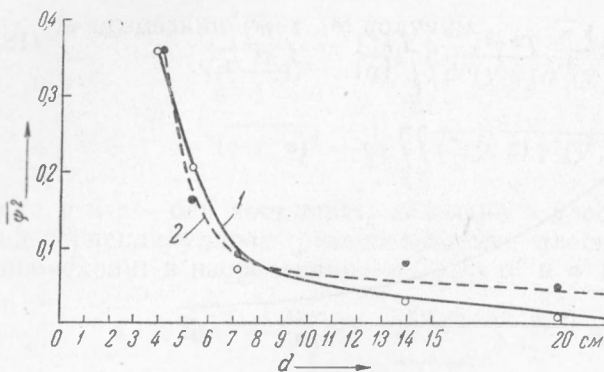


Рис. 3. Сириус. Данные Миннерта. $l = 4$ см. 1 — теоретическая кривая, 2 — экспериментальная

d	$\overline{\psi^2}$	M_0	d	$\overline{\psi^2}$	M_0
4,2	0,33	6,44	14,0	0,084	6,66
5,4	0,16	6,88	20,0	0,053	5,93
7,2	0,072	5,70			

для $(\varphi - \varphi')^2$ (см. рис. 1).

На рис. 3 представлены экспериментальная и теоретическая кривые зависимости среднего квадратичного флукуаций интен-

сивности света $\overline{\psi^2}$ в зависимости от диаметра объектива при примерно одном и том же зенитном расстоянии (массе Бемпорада M_0); экспериментальные данные взяты из работы Миннерта и Хаутгаста⁽⁵⁾ по фотометрическому исследованию флукуаций яркости звезд. Как видно из этого рисунка, характер теоретической кривой, построенной с использованием рис. 2, относительной средней квадратичной флукуации амплитуды при $l_b = 4$ см, довольно хорошо соответствует экспериментальной зависимости.

Заметим, что проведенный нами расчет справедлив в том случае, когда возможно разложение $e^{i\varphi'} = 1 + i\varphi'$, т. е. когда флукуации фазы малы. В случае больших расстояний L это условие может оказаться нарушенным. При $l_b = 4$ см это будет иметь место в условиях атмосферы уже начиная с $L \sim 10^4$ см (если считать, что атмосферная турбулентность имеет одинаковую интенсивность на разных высотах). Поэтому законность сравнения расчетных формул при $h \gg l$ с экспериментальными данными Миннерта и Хаутгаста нельзя считать в достаточной степени обоснованной. Однако, если считать, что основную роль в флукуациях коэффициента преломления играют нижние слои атмосферы, где турбулентность более интенсивна, то эффективное значение L сильно уменьшится, и законность разложения будет справедливой для больших расстояний.

Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Шарплес, Сборн. статей Распространение сантиметровых радиоволн в тропосфере, 1950. ² В. А. Красильников, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 13, № 1 (1949). ³ В. А. Красильников, ДАН, 65, № 3 (1949). ⁴ А. Данжон и А. Кудэ, Астр. журн., 18, № 1, 77 (1940). ⁵ M. Minnaert, J. Hautgast, Z. Astroph., 10, No. 2 (1935).