Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 XI 1952)

Общие решения уравнений теории упругости уже записывались в произвольных криволинейных координатах ([1], [2]). Однако при этом выкладки не доводились до конца и напряжения и перемещения не выражались через гармонические функции, а оставались представленными через производные произведений, содержащих указанные функции.

Ниже выводятся общие формулы, определяющие в произвольных координатах перемещения и напряжения через три гармонические функции *.

Решение П. Ф. Папковича ([3]) в ковариантных составляющих вектора перемещений имеет вид:

$$u_k = \varphi_k - \frac{m}{4(m-1)} \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{r}\vec{\varphi} + \varphi_0), \tag{1}$$

где φ_k — ковариантная компонента гармонической вектор-функции, $\vec{\varphi}$ и φ_0 — гармоническая функция (x_k — контровариантная координата).

Компоненты φ_k, вообще говоря, не являются гармоническими функциями, поэтому (1) следует преобразовать так, чтобы выразить u_k через гармонические функции.

Пусть связь между декартовыми и криволинейными координатами дается соотношениями:

$$x = x(x_1, x_2, x_3), \quad y = y(x_1, x_2, x_3), \quad z = z(x_1, x_2, x_3); \tag{2}$$

тогда на основании формулы преобразования ковариантных компонент вектора имеем

$$\varphi_k = \frac{\partial x}{\partial x_k}\varphi_k + \frac{\partial y}{\partial x_k}\varphi_y + \frac{\partial z}{\partial x_k}\varphi_z = \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial x_k}\varphi_x, \tag{3}$$

где S — символ суммирования по циклической перестановке координат x, y и z, а φ_x, φ_y, φ_z — гармонические функции.

Внося (3) в (1) и развертывая производную от скалярного произведения $\mathbf{r}\vec{\varphi}$, получаем окончательную формулу для перемещения u_k:

$$u_k = \frac{3m-4}{4(m-1)}\mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial x_k}\varphi_x - \frac{m}{4(m-1)}\left[\mathbf{S}\, x\frac{\partial \varphi_x}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k}\right]. \tag{4}$$

* Для получения общего решения достаточно иметь три функции из вводимых ниже четырех (φ_x, φ_y, φ_z, φ_0).

Вычислим теперь ковариантные компоненты тензора напряжений. На основании закона Гука имеем:

$$\sigma_{ik} = 2\mu \left[\frac{g_{ik}}{m-2} \vartheta + \varepsilon_{ik} \right], \tag{5}$$

где σ_{ik}, ε_{ik} и g_{ik} — ковариантные компоненты тензора напряжений, тензора деформаций и метрического тензора; ϑ — объемное расширение; μ — модуль сдвига; m — число Пуассона.

Но, как известно:

$$\vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{m-2}{2(m-1)} \operatorname{div} \vec{\varphi}, \tag{6}$$

поэтому

$$\vartheta = \frac{m-2}{2(m-1)} g^{\nu k} \nabla_\nu \varphi_k =$$

$$= \frac{m-2}{2(m-1)} g^{\nu k} \left[\frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathbf{S} \frac{\partial x}{\partial x_k} \varphi_x - \Gamma^\lambda_{\nu k} \mathbf{S} \frac{\partial x}{\partial x_\lambda} \varphi_x \right], \tag{7}$$

где ∇_ν — символ ковариантного дифференцирования, а $\Gamma^\lambda_{\nu k}$ — символ Кристоффеля второго рода.

Развертывая (7) и учитывая формулу дифференцирования декартовых координат по криволинейным

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_\nu \, \partial x_k} = \frac{\partial x}{\partial x_\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu k}, \tag{8}$$

окончательно получаем:

$$\frac{\vartheta}{m-2} = \frac{g^{\nu k}}{2(m-1)} \mathbf{S} \frac{\partial x}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_\nu}. \tag{9}$$

Необходимые далее ковариантные компоненты тензора деформации вычисляются на основании формулы

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - 2\Gamma^\lambda_{ik} u_\lambda \right\}. \tag{10}$$

Подставляя (1) в (10) и используя (8), имеем:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{m-2}{4(m-1)} \mathbf{S} \left(\frac{\partial x}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_i} + \frac{\partial x}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_k} \right) - \frac{m}{4(m-1)} \mathbf{S}\, x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x_i \, \partial x_k} +$$

$$+ \frac{m}{4(m-1)} \Gamma^\lambda_{ik} \mathbf{S}\, x \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_\lambda} - \frac{m}{4(m-1)} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \, \partial x_k} + \frac{m}{4(m-1)} \Gamma^\lambda_{ik} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\lambda}. \tag{11}$$

Внося значения ϑ и ε_{ik} в выражение σ_{ik}, получаем искомую формулу:

$$\frac{\sigma_{ik}}{2\mu} = \frac{g_{ik} g^{\nu l}}{2(m-1)} \mathbf{S} \frac{\partial x}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_\nu} + \frac{m-2}{4(m-1)} \mathbf{S} \left(\frac{\partial x}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_i} + \frac{\partial x}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_k} \right) -$$

$$- \frac{m}{4(m-1)} \mathbf{S}\, x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x_i \, \partial x_k} + \frac{m}{4(m-1)} \Gamma^\lambda_{ik} \mathbf{S}\, x \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_\lambda} -$$

$$- \frac{m}{4(m-1)} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \, \partial x_k} + \frac{m}{4(m-1)} \Gamma^\lambda_{ik} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\lambda}, \tag{12}$$

в которой φ_x, φ_y, φ_z и φ_0 суть решения уравнения $\Delta\varphi = 0$.

В рассматриваемой координатной системе уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta\varphi = \nabla^k \nabla_k \varphi = g^{\nu k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu \partial x_k} - g^{\nu k} \Gamma^\lambda_{\nu k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} = 0. \tag{13}$$

При переходе к частному случаю ортогональных координат формула (12) упрощается и может быть удобнее записана раздельно для нормальных и касательных напряжений.

Именно, выражая символы Кристоффеля Γ_{ik}^{λ} через коэффициенты Ламе $H_i = g_{ii}$, имеем

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ss}^{\lambda} &= 2\delta_s^{\lambda} \frac{H_s^2}{H_\lambda^2} \frac{\partial \ln H_s}{\partial x_s} - \frac{H_s^2}{H_\lambda^2} \frac{\partial \ln H_s}{\partial x_\lambda}, \\
\Gamma_{ik}^{\lambda} &= \delta_i^{\lambda} \frac{H_i^2}{H_\lambda^2} \frac{\partial \ln H_i}{\partial x_k} + \delta_k^{\lambda} \frac{H_k^2}{H_\lambda^2} \frac{\partial \ln H_k}{\partial x_i} \quad (i \neq k)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

(δ_i^{λ} — компонента тензорной единицы). Подставляя (14) в (12), после простых преобразований, получаем формулы, указанные М. Садовским и Е. Штернбергом [4]:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_s}{2\mu} &= \frac{1}{2(m-1)} \mathbf{S} \frac{H_s^2}{H_\lambda^2} \frac{\partial x}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_\lambda} + \frac{m-2}{2(m-1)} \mathbf{S} \frac{\partial x}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_s} - \\
&- \frac{m}{4(m-1)} \mathbf{S}\, x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x_s^2} + \frac{m}{2(m-1)} \mathbf{S}\, x \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_s} \frac{\partial \ln H_s}{\partial x_s} - \\
&- \frac{m}{4(m-1)} \mathbf{S} \frac{H_s^2}{H_\lambda^2} \frac{\partial \ln H_s}{\partial x_\lambda} x \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_\lambda} - \frac{m}{4(m-1)} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_s^2} + \\
&+ \frac{m}{2(m-1)} \left[\frac{\partial \ln H_s}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_s} - \frac{1}{2} \frac{H_s^2}{H_\lambda^2} \frac{\partial \ln H_s}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\lambda} \right];
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\tau_{ik}}{2\mu} &= \frac{m-2}{4(m-1)} \mathbf{S} \left[\frac{\partial x}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_i} + \frac{\partial x}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_k} \right] - \frac{m}{4(m-1)} \mathbf{S}\, x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x_i \partial x_k} + \\
&+ \frac{m}{4(m-1)} \mathbf{S} \left[x \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_i} \frac{\partial \ln H_i}{\partial x_k} + x \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_k} \frac{\partial \ln H_k}{\partial x_i} \right] - \\
&- \frac{m}{4(m-1)} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{m}{4(m-1)} \left[\frac{\partial \ln H_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} + \frac{\partial \ln H_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k} \right]
\end{aligned}
\tag{16}
$$

(по s, i и k не суммировать!), где функции φ_x, φ_y, φ_z, φ_0 суть решения уравнения

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \right\} = 0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Следует помнить, что все выписанные формулы определяют ковариантные компоненты тензоров напряжений и деформаций; их физические компоненты определяются по формулам

$$
\hat{\varepsilon}_{ik} = \frac{\varepsilon_{ik}}{H_i H_k}, \quad \hat{\sigma}_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{H_i H_k}
\tag{18}
$$

(по i и k не суммировать).

Полагая $\vec{\varphi} = \Delta\vec{\psi}$, получаем формулы, соответствующие решению Б. Г. Галеркина [5].

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступило
10 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Я. Штаерман, Журн. Ин-та матем. АН УССР, № 3—4, 35 (1935). [2] Г. С. Шапиро, ДАН, **65**, № 8, 697 (1947). [3] П. Ф. Папкович, Теория упругости, 1939. [4] M. A. Sadowsky, E. Sternberg, J. appl. Mech., **16**, № 2, 149 (1949). [5] Б. Г. Галеркин, ДАН, А, 14, 353 (1930).