Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

А. ХАЛАНАЙ

О ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 XI 1952)

В настоящей заметке рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\,x = 0, \quad \text{где } p(t) = \mu + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\alpha_k t},$$

причем показатели α_k удовлетворяют условию $\alpha_k > \alpha > 0$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится. Для случая периодического коэффициента ($\alpha_k = k$) имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть дано уравнение*

$$\ddot{x} + p(t)\,x = 0, \quad \text{где } p(t) = \mu + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikt}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = M.$$

Тогда:

1) *уравнение имеет всегда одно решение вида*

$$x_1(t) = e^{i\sqrt{\mu}t}\Phi(t), \quad \text{где } \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ikt};$$

2) *если* $2\sqrt{\mu}$ *не есть целое число, то второе решение имеет вид*

$$x_2(t) = e^{-i\sqrt{\mu}t}\psi(t), \quad \text{где } \psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt};$$

3) *если* $2\sqrt{\mu}$ *есть целое число, то второе решение имеет вид*

$$x_2(t) = e^{-i\sqrt{\mu}t}\psi_1(t) + te^{i\sqrt{\mu}t}\psi_2(t), \quad \text{где } \psi_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k^j e^{ikt}, \quad j = 1, 2.$$

Доказательство. Заменой $z = e^{it}$ получается уравнение

$$z^2 \frac{d^2x}{dz^2} + z\frac{dx}{dz} - q(z)\,x = 0$$

с регулярной особой точкой. Из известных фактов относительно решений этого уравнения [1] вытекают сразу утверждения теоремы.

Для общего случая почти-периодического коэффициента все утверждения теоремы 1 при надлежащем их обобщении остаются в силе. Именно, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть дано уравнение*

$$\ddot{x} + p(t)\,x = 0, \quad \text{где } p(t) = \mu + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\alpha_k t},$$

причем $\alpha_k > \alpha > 0$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = M$.

Тогда:

1) *уравнение всегда имеет одно решение вида*

$$x(t) = e^{i\sqrt{\mu}t}\Phi(t), \quad \text{где} \quad \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{i\beta_k t}, \quad \beta_k = \sum l_i\alpha_i,\ l_i \geqslant 0 \text{ целые},\ \beta_0 = 0;$$

2) *если* $2\sqrt{\mu}$ *не допускает представления вида* $\Sigma l_i\alpha_i$ ($l_i \geqslant 0$ *целые*), *то второе решение имеет вид*

$$x(t) = e^{-i\sqrt{\mu}t}\psi(t), \quad \text{где} \quad \psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i\beta_k t};$$

3) *если* $2\sqrt{\mu} = \Sigma l_i\alpha_i$, *то второе решение имеет вид*

$$x(t) = te^{i\sqrt{\mu}t}\Phi_1(t) + e^{i\sqrt{\mu}t}\Phi_2(t) + e^{-i\sqrt{\mu}t}\Phi_3(t),$$

$$\text{где } \Phi_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k^j e^{i\beta_k t}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Замечание. Пункт 3 теоремы применим, в частности, в случае $\mu = 0$, причем в этом случае второе решение имеет вид

$$x(t) = t\Phi_1(t) + \Phi_2(t), \quad \Phi_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k e^{-i\beta_k t}.$$

Случай $\mu = 0$ был изучен Винтером и Путнамом (2).

Доказательство. Вводится параметр ε и уравнение переписывается в виде

$$\ddot{x} + \left(\mu + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\alpha_k t}\right) x = 0;$$

ищется решение в виде ряда по степеням ε:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(t).$$

Для определения $y_n(t)$ получаются уравнения

$$\ddot{y}_0 + \mu y_0 = 0, \ldots, \ddot{y}_n + \mu y_n + y_{n-1}\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\alpha_k t} = 0.$$

Выбираем

$$y_0 = e^{i\sqrt{\mu}t}.$$

По индукции получается для y_n выражение

$$y_n = \sum_{k_1 \ldots k_n} \frac{a_{k_1} \ldots a_{k_n} e^{i(\alpha_{k_1} + \ldots + \alpha_{k_n} + \sqrt{\mu})t}}{\alpha_{k_n}(\alpha_{k_{n-1}} + \alpha_{k_n}) \ldots (\alpha_{k_1} + \ldots + \alpha_{k_n})(\alpha_{k_n} + 2\sqrt{\mu}) \ldots (\alpha_{k_1} + \ldots + \alpha_{k_n} + 2\sqrt{\mu})} =$$

$$= e^{i\sqrt{\mu}t}\varphi_n(t).$$

Тоже по индукции устанавливается оценка

$$|\varphi_n(t)| \leqslant \frac{|M/\alpha^2|^n}{(n!)^2}.$$

Получаем решение

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = e^{i\sqrt{\mu}t}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t),$$

причем из предыдущей оценки вытекает, что $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)$ абсолютно и равномерно сходится. Этим первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение получается таким же образом. Выбирается

$$y_0 = e^{-i\sqrt{\mu}t}$$

и получается по индукции

$$y_n = \sum_{k_1\ldots k_n} \frac{a_{k_1}\ldots a_{k_n} e^{i(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_n}-\sqrt{\mu})t}}{\alpha_{k_n}(\alpha_{k_{n-1}}+\alpha_{k_n})\ldots(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_n})(\alpha_{k_n}-2\sqrt{\mu})\ldots(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_n}-2\sqrt{\mu})} =$$
$$= e^{-i\sqrt{\mu}t}\psi_n(t),$$

причем для $\psi_n(t)$ имеет место оценка

$$|\psi_n(t)| \leqslant \frac{(M/\alpha d)^n}{n!}, \quad d = \min_l \left|\sum l_i\alpha_i - 2\sqrt{\mu}\right|,$$

которая устанавливается также по индукции.

Рассмотрим теперь случай $2\sqrt{\mu} = \Sigma l_i\alpha_i$. Пусть $\{k\}$ — множество целых чисел таких, что $\Sigma l_i = k$ и пусть l и p — соответственно, наименьшее и наибольшее числа из $\{k\}$. Тогда для y_{l-1} получается выражение

$$y_{l-1} = \sum_{k_1\ldots k_{l-1}} \frac{a_{k_1}\ldots a_{k_{l-1}} e^{i(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_{l-1}})t}}{\alpha_{k_{l-1}}\ldots(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_{l-1}})(\alpha_{k_{l-1}}-2\sqrt{\mu})\ldots(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_{l-1}}-2\sqrt{\mu})} e^{-i\sqrt{\mu}t}$$

с оценкой

$$|y_{l-1}| \leqslant \frac{(M/\alpha^2)^{l-1}}{(l-1)!}.$$

Выражение для y_l получается из уравнения

$$\ddot{y}_l + \mu y_l + y_{l-1}\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\alpha_k t} = 0.$$

Находим:

$$y_l = te^{i\sqrt{\mu}t}\varphi_l + e^{i\sqrt{\mu}t}\psi_l + e^{-i\sqrt{\mu}t}\chi_l$$

с оценками

$$|\varphi_l| \leqslant \frac{\alpha(M/\alpha^2)^l}{l!}, \quad |\psi_l| \leqslant \frac{(M/\alpha^2)^l}{l\cdot l!}, \quad |\chi_l| \leqslant \frac{(M/\alpha^2)^l}{l!}.$$

По индукции устанавливается далее

$$y_{l+n} = te^{i\sqrt{\mu}t}\varphi_{l+n} + e^{i\sqrt{\mu}t}\psi_{l+n} + e^{-i\sqrt{\mu}t}\chi_{l+n},$$

где

$$\varphi_{l+n} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k_1\ldots k_j} A_{k_1\ldots k_j}^{(l+n)} e^{i(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_j})t} + A_0^{(l+n)},$$

$$\psi_{l+n} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k_1\ldots k_j} B_{k_1\ldots k_j}^{(l+n)} e^{i(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_j})t} + B_0^{(l+n)},$$

$$\chi_{l+n} = \sum_{k_1\ldots k_{l+n}} C_{k_1\ldots k_{l+n}} e^{i(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_{l+n}})t},$$

и оценки

$$|\chi_{l+n}| \leqslant \frac{(M/\alpha^2)^{l+n}}{(l+n)!}, \quad |\varphi_{l+n}| \leqslant \frac{3\alpha (M/\alpha^2)^{l+n}}{(l+n)!}, \quad |\psi_{l+n}| \leqslant \frac{7 (M/\alpha)^{l+n}}{(l+n)!}$$

для $l+n \leqslant p$.

Далее устанавливается, что

$$y_{p+q} = te^{i\sqrt{\mu}t}\varphi_{p+q} + e^{i\sqrt{\mu}t}\psi_{p+q} + e^{-i\sqrt{\mu}t}\chi_{p+q},$$

где

$$\varphi_{p+q} = \sum_{j=q}^{p+q-l} \sum_{k_1\ldots k_j} A_{k_1\ldots k_j}^{(p+q)} e^{i(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_j})t},$$

$$\psi_{p+q} = \sum_{j=q}^{p+q-l} \sum_{k_1\ldots k_j} B_{k_1\ldots k_j}^{(p+q)} e^{i(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_j})t},$$

$$\chi_{p+q} = \sum_{k_1\ldots k_{p+q}} C_{k_1\ldots k_{p+q}} e^{i(\alpha_{k_1}+\ldots+\alpha_{k_{p+q}})t},$$

причем имеют место оценки

$$|\varphi_{p+q}(t)| \leqslant \frac{3\alpha (M/\alpha^2)^{p+q}}{(p+q)!}, \quad |\psi_{p+q}(t)| \leqslant \frac{7 (M/\alpha)^{p+q}}{(p+q)!}, \quad |\chi_{p+q}(t)| \leqslant \frac{(M/\alpha^2)^{p+q}}{(p+q)!}.$$

Отсюда следует, что $\sum_{q=1}^{\infty} \varphi_{p+q}(t)$, $\sum_{q=1}^{\infty} \psi_{p+q}(t)$, $\sum_{q=1}^{\infty} \chi_{p+q}(t)$ сходятся абсолютно и равномерно. Получаем, следовательно, решение вида

$$x(t) = \sum_{n=0}^{p} y_n(t) + \sum_{q=1}^{\infty} y_{p+q}(t) = te^{i\sqrt{\mu}t}\Phi_1(t) + e^{i\sqrt{\mu}t}\Phi_2(t) + e^{-i\sqrt{\mu}t}\Phi_3(t).$$

Для случая $\mu = 0$ доказательство проводится аналогично.

Следствия. 1. Пусть дано уравнение $\ddot{x} + p(t)x = 0$, $p(t) = \mu + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\alpha_k t}$, причем $\alpha_k > \alpha > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = M$. Тогда, если $2\sqrt{\mu} \neq \Sigma l_i \alpha_i$ и $\mu > 0$, то все решения уравнения ограничены.

2. Пусть дана система $\ddot{x} + P(t)x = 0$, где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $P(t) = \begin{pmatrix} \mu + a & -b \\ -b & \mu + a \end{pmatrix}$, $a = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos \alpha_k t - s_k \sin \alpha_k t$, $b = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \cos \alpha_k t + r_k \sin \alpha_k t$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{|r_k|^2 + |s_k|^2} < +\infty$, $\alpha_k > \alpha > 0$. Тогда, если $2\sqrt{\mu} \neq \Sigma l_i \alpha_i$ ($l_i \geqslant 0$ целые) и $\mu > 0$, то все решения системы будут почти-периодическими.

В самом деле, если положить $x_1 + ix_2 = z$, $\mu + a + ib = p(t)$, $a_k = r_k + is_k$, получается для z уравнение $\ddot{z} + p(t)z = 0$, где $p(t) = \mu + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\alpha_k t}$, $\alpha_k > \alpha > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$, т. е. уравнение рассмотренного типа.

Институт механики и математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М.—Л., 1950, стр. 217. [2] C. R. Putnam, A. Winter, Am. J. Math., 73, No. 4, 792 (1951).