Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

А. И. ФЕТ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ И ЧИСЛОМ ЭКСТРЕМАЛЕЙ НА МНОГООБРАЗИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 XI 1952)

Пусть R — четырежды непрерывно дифференцируемое многообразие, на котором определена положительно регулярная вариационная задача. Предположим, что R полно относительно своей финслеровой метрики, т. е. что каждое ограниченное замкнутое подмножество R компактно.

Если не все гомотопические группы $\pi^k(R)$ $(k \geqslant 1)$ тривиальны, то к многообразию применимы результаты гл. III нашей работы ([5]) *, откуда вытекает без труда:

Теорема 1. *Если в финслеровом пространстве R имеется пара точек, которые можно соединить только одной экстремальной дугой, то пространство R можно деформировать на R в точку.*

Заметим, что если каждые две точки R можно соединить единственной экстремальной дугой, то совершенно элементарно доказывается гомеоморфность R евклидову пространству.

Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства A в топологическое пространство B. Обозначим через $\operatorname{cat} f$ и назовем категорией отображения наименьшее число k, обладающее следующим свойством: A представимо в виде суммы замкнутых множеств $A_1, \ldots, A_k$ таких, что отображение f, рассматриваемое на $A_1, \ldots, A_k$, гомотопно нулю. При $k=1$ получаем несущественное отображение, при $k>1$ — некоторую классификацию существенных отображений.

Очевидно,

$$\operatorname{cat} f \geqslant \operatorname{cat}_B f(A).$$

Теорема 2. *Если существует отображение f некоторого компакта A в пространстве кривых с закрепленными концами $\Omega_{ab}(R)$* ([5]) *такое, что $\operatorname{cat} f = k$, то на R либо существует k экстремальных дуг разной длины, соединяющих a с b, либо континуум таких дуг* (ср. ([3])).

Заметим, что введенное понятие категории непрерывного отображения позволяет наиболее естественным образом изложить часть рассуждений в ([3]), где оно, по существу, неявно используется.

* Как доказал С. Э. Кон-Фоссен ([1]), замкнутое многообразие положительной кривизны всегда имеет конечную фундаментальную группу; для таких многообразий выполнены, следовательно, предположения ([5]), гл. III

Установим теперь связь между гомологиями R и пространств кривых на R. Обозначим через $Z(R)$ пространство направленных кривых на R ([5], гл. II), через $\Sigma(R)$ — пространство замкнутых ненаправленных кривых на R ([6], стр. 62).

Если M, N — замкнутые подмножества R, обозначим через $Z(R;\ M,\ N)$ множество кривых из $Z(R)$ с началом на M и концом на N. Гомологии будем определять при помощи особых симплексов по любой области коэффициентов. Пусть $\Delta^r(R,\ P)$ — группа относительных гомологий R по модулю подмножества P. Пусть $D=(T^r, f)$ — особый симплекс $Z(R;\ M,\ N)$; обозначая через $p_t(l)$ точку кривой l с приведенным параметром t, положим

$$g(q,\ t)=p_t(f(q)) \quad (q \in T^r,\ t \in [0,\ 1]).$$

$g(q,\ t)$ определяет особую цепь $\psi(D)=(T^r \times [0,\ 1],\ g)$ пространства R. ψ есть отображение цепей $Z(R;\ M, N)$ в цепи R, причем, как легко видеть,

$$\Delta\psi(D)=\psi(\Delta D)+E,$$

где $E \subset (M \cup N)$.

Следовательно, ψ определяет гомоморфизм α группы $\Delta^r(Z(R;\ M,\ N))$ в группу $\Delta^{r+1}(R;\ M \cup N)$; мы назовем α е с т е с т в е н н ы м гомоморфизмом. Переходя к пространству замкнутых неориентированных кривых Σ, рассмотрим непрерывное отображение

$$p=g(q,\ t) \quad (q \in T^r, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \quad p \in R)$$

такое, что $g(q,\ 0)=g(q,\ 2\pi)$ $(q \in T^r)$. При фиксированном q_0 отображение $p=g(q_0,\ t)$ определяет замкнутую кривую l_{q_0} на R.

Если l спрямляема при всех $q_0 \in T^r$, положим $l_{q_0}=f(q_0)$ и назовем особый симплекс $(T^r,\ f)$ пространства с п е ц и а л ь н ы м. Пользуясь только специальными особыми симплексами, можно определить «специальные группы Бетти» по модулю 2 пространства Σ и показать, что они изоморфны обычным.

Особому специальному симплексу $(T^r,\ f)$ поставим в соответствие цепь $(T^r \times [0,\ 1],\ g)$ пространства R. Этим соответствием определяется естественный гомоморфизм α группы $\Delta^r(\Sigma(R))$ в $\Delta^{r+1}(R)$, где обе группы взяты по модулю 2.

Докажем теперь следующие две теоремы.

Т е о р е м а 3. *Пусть R замкнуто, односвязно и все группы $\Delta^r(R)$ при $1 \leqslant r \leqslant k$ тривиальны, но $\Delta^{k+1}(R) \neq 0$. Обозначим через p^{k+1} число Бетти* (mod 2) *многообразия R; тогда k-е типовое число замкнутых экстремалей и R* ([7]) *не меньше p^{k+1}.*

В условиях теоремы $\pi^{k+1}(R)$ изоморфна $\Delta^{k+1}(R)$. Можно выбрать p^{k+1} сфероидов $(S^{k+1},\ g_j)$ $(j=1,\ \ldots,\ p^{k+1})$, определяющих независимые по модулю 2 базисные $(k+1)$-мерные циклы R. Обозначим через η_k цикл, точками которого являются окружности S^{k+1}, проходящие через точки $a,\ b \in S^{k+1}$, $a \neq b$. Отображение g_j индуцирует очевидным образом отображение f_j цикла η_k в Σ; при этом получаем цикл $(\eta_k,\ f_j)$. Обозначая класс гомологий цикла z через z^*, имеем

$$\alpha(\eta_k,\ f_j)^*=(S^{k+1},\ g_j)^* \quad (j=1,\ \ldots,\ p^{k+1}).$$

Так как циклы $(S^{k+1},\ g_j)$ независимы, то k-е число Бетти пространства Σ не меньше p^{k+1}, и утверждение теоремы следует из результатов Морса ([7]).

Т е о р е м а 4. *Пусть R замкнуто и неодносвязно. Тогда на R существует: либо не менее трех негомотопных нулю и друг другу* *кратчайших замкнутых экстремалей; либо одна негомотопная нулю кратчайшая замкнутая экстремаль и одна гомотопная нулю замкнутая экстремаль; либо континуальное семейство гомотопных нулю и одна негомотопная нулю замкнутая экстремаль. Число замкнутых экстремалей, таким образом, не менее двух.*

Если R не асферично, теорема без труда следует из ([5]), гл. IV. Если же R асферично, то, как известно ([4]), фундаментальная группа R имеет не менее двух образующих a, b. Тогда кратчайшие замкнутые экстремали классов a, b, ab удовлетворяют условиям теоремы, так как, очевидно, геометрически различны.

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
18 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Э. Кон-Фоссен, ДАН, **3** (**8**), № 9 (1935). [2] Л. А. Люстерник, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **19** (1947). [3] Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах, 1930. [4] В. А. Рохлин, Усп. матем. наук, **1**, в. 5—6 (1946). [5] А. И. Фет, Матем. сборн., **30**, № 2 (1952). [6] А. И. Фет, Уч. зап. Томск. ун-та, **17** (1952). [7] M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, 1934.