

Б. Н. РАХМАНОВ

К ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 XI 1952)

Рассмотрим классы функций:

а) S^* — класс функций $\varphi(z)$, регулярных и однолистных в $|z| < 1$;

б) S — класс функций $F(z)$, однолистных, регулярных в $|z| < 1$ и отображающих круг $|z| < 1$ на звездообразные относительно точки $w = 0$ области плоскости w ;

в) K — класс функций $f(z)$, однолистных, регулярных в $|z| < 1$ и отображающих круг $|z| < 1$ на выпуклые области плоскости w .

Кроме того предположим, что функции всех этих классов нормированы, т. е.

$$\varphi(0) = F(0) = f(0) = 0, \quad \varphi'(0) = F'(0) = f'(0) = 1.$$

Теорема 1. Если функции $\varphi_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, n$, принадлежат к классу S^* , то функция

$$\psi_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k(z)$$

выпукла в круге $|z| \leq 0,188$.

Доказательство строится на использовании известных оценок для однолистных, регулярных в $|z| < 1$ функций. При помощи этих оценок получаем, что радиус выпуклости функции $\psi_n(z)$ не меньше наименьшего положительного корня уравнения:

$$(1 + r^2)(1 - 8r^2 + 8r^4) - 4r = 0,$$

что и доказывает теорему.

Следствие. Если функция $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ принадлежит к классу S^* , то функция

$$\varphi^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

выпукла в круге $|z| \leq 0,188$.

Теорема 2. Если функция $f_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, n$, принадлежит к классу K , то функция

$$\omega(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(z)$$

выпукла в круге $|z| \leq 0,39$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.
 Теорема 2 переносится и на звездообразные функции. Именно:
 Теорема 3. Если функции $F_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, n$, принадлежат к классу S , то функция

$$\omega^*(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k(z)$$

звездообразна в круге $|z| \leq 0,39$.

Следствие. Если функция $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in S$, то функция

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} z^{2k+1}$$

звездообразна в $|z| \leq 0,39$.

Теорема 4. Если функции $f_1(z) \in K$ и $f_2(z) \in K$ отображают круг $|z| \leq r < 1$, соответственно, на области $P_1(r)$ и $P_2(r)$ и вектор $f_1(re^{i\varphi}) - f_2(-re^{i\varphi})$, идущий из точки $f_2(-re^{i\varphi})$ в точку $f_1(re^{i\varphi})$, проходит при любом φ , $0 \leq \varphi < 2\pi$, через пересечение областей $P_1(r) P_2(r)$, то функция

$$\omega = \Phi(z) = {}^{1/2}[f_1(z) - f_2(-z)]$$

отображает круг $|z| \leq r$ на звездообразную относительно точки $\omega = 0$ область.

Доказательство следует из геометрических соображений, аналогичных указанным автором ранее (1, 2).

Примером могут служить функции:

$$f_1(z) = \operatorname{arc} \sin z; \quad f_2(z) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z; \quad \Phi_1(z) = {}^{1/2}[\operatorname{arc} \sin z - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-z)].$$

Функция $\Phi_1(z)$ однолистка и звездообразна в круге $|z| < 1$.

Теорема 5. Если функция $f(z) \in K$, то любой отрезок ее разложения в степенной ряд

$$S_m(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$$

однолистен в круге $|z| < {}^{1/2}$ при любом $m \neq 4$.

Доказательство однолиственности отрезков $S_m(z)$ при $m \geq 5$ получаем при помощи неравенства

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \frac{1}{(1+r)^2}, \quad |z_1| = |z_2| = r.$$

Это неравенство легко устанавливается из результата, полученного автором (1). Случай $m = 3$ доказывается методом Сеге (3). Интересно отметить, что не все отрезки $S_m(z)$ выпуклых функций $f(z)$ выпуклы в круге $|z| < {}^{1/2}$, как показывает пример функции $f(z) = \frac{z}{1-z}$ и ее отрезка $S_3(z) = z + z^2 + z^3$.

Поступило
20 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. Н. Рахманов, ДАН, 78, № 2 (1951). ² Б. Н. Рахманов, ДАН, 82, № 3 (1952). ³ G. Szegő, Math. Ann., 100 (1928).