Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ *

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 X 1952)

Как известно [3], задача о нахождении функции u, удовлетворяющей на некоторой области Ω полигармоническому уравнению

$$\Delta^r u = 0, \tag{1}$$

при соответствующих граничных условиях сводится к нахождению минимума интеграла

$$D_r(f) = \int_\Omega \ldots \int \sum_{\Sigma \alpha_i = r} \frac{r!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^r u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 d\Omega \tag{2}$$

среди всевозможных функций f, имеющих те же, что и функция u, граничные условия, и для которых интеграл (2) конечен.

В работах [1, 2] С. Л. Соболева при весьма общих условиях, налагаемых на область Ω, показаны существование и единственность минимума вариационной задачи (2) и обоснован тот факт, что минимизирующая функция полигармоническая. При доказательстве этих предположений исходной точкой было обычное для вариационного исчисления предположение, что возможно построить хотя бы одну (допустимую) функцию f, удовлетворяющую поставленным граничным условиям и имеющую конечный интеграл (2).

Нас здесь будет интересовать вопрос, какими должны быть граничные условия, чтобы построение допустимой функции было возможно. С. Л. Соболев в упомянутых работах дал необходимые условия, которым должна удовлетворять допустимая функция на границе области.

Мы хотим здесь показать, что эти необходимые условия в несколько более усиленном виде могут быть получены как следствия результатов, изложенных в [4, 5], и при этом в этом усиленном виде они, оказывается, находятся в известном смысле на грани с достаточными условиями. Именно, сколь угодно малое (в определенном смысле) улучшение этих необходимых условий уже влечет возможность построения на Ω допустимой функции f.

---

* Результаты этой статьи и статей [4, 5] доложены на конференции по дифференциальным уравнениям (Москва, май 1952 г.).

Пусть границей области Ω служит совокупность дифференцируемых не пересекающихся между собой многообразий $S_1, \ldots, S_\mu$ (точное их определение см. ([5])), соответственно имеющих измерения $m_1, \ldots, m_\mu$ $(2r - n + m_k > 0)$.

Будем говорить, что функция f принадлежит к классу $W_p^{(r)}(\Omega; M)$, если она и все ее частные производные порядков до r включительно интегрируемы вместе со своими p-ми степенями на Ω и имеют нормы в смысле $L_p(\Omega)$, не превышающие M $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Лемма. *Функцию f, принадлежащую к $W_p^{(r)}(\Omega; M)$, можно продолжить за пределы Ω на все пространство R_n так, что продолженная функция $\bar{f} \in W_p^{(r)}(R_n; M_1)$, причем $M_1 < cM$, где c — константа.*

Теорема 1. *Если функция $f \in W_2^{(r)}(\Omega; M)$, то на куске σ многообразия S_k, определяемого явно через координаты $x_1, \ldots, x_{m_k}$ (или другие координаты) уравнениями*

$$x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{m_k}) \quad (i = m_k + 1, \ldots, n), \quad (x_1, \ldots, x_{m_k}) \in G_\sigma, \tag{3}$$

ее нормальные к σ производные $\dfrac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m_{k+1}}^{\lambda_{m_{k+1}}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}$

$$\lambda = \sum_{m_{k+1}}^{n} \lambda_i, \quad \rho^{(\lambda)_k} = r - \lambda - \frac{n - m_k}{2} > 0, \tag{4}$$

принадлежат к классу $H_2^{\rho(\lambda)_k}(G, M_1)$ (терминологию см. ([4, 5])) с некоторой постоянной M_1, где G — область такая, что $\bar{G} \subset G_\sigma$.

Доказательство. Продолжаем f на R_n так, чтобы продолженная функция $\bar{f} \in W_2^{(r)}(R_n, M_1)$. В таком случае $\bar{f} \in H_{2,n}^{(r)}(M_1)$, и утверждение теоремы следует из теоремы 1 ([5]).

Теорема 2 (обратная). *Пусть многообразия S_k покрыты конечным числом лежащих на них (перекрывающихся) кусков σ. Куски эти явно выражаются через те или иные m_k координат при помощи равенств (3) и с точками их связаны определенные системы нормальных к σ векторов $\bar{N}_{m_{k+1}}, \ldots, \bar{N}_n$.*

С каждым куском σ, лежащим на S_k, и с каждой допустимой системой $(\lambda)_k$, удовлетворяющей условиям (4), связана функция $F_{(\lambda)_k\sigma}$, заданная на σ. Если кусок σ явно выражается через координаты $x_1, \ldots, x_{m_k}$ (или другие координаты) равенствами (3), то функция $F_{(\lambda)_k\sigma}$, выраженная через эти координаты, пусть принадлежит к классу

$$H_2^{\rho(\lambda)_k + \varepsilon}(G_\sigma, M) \quad (\bar{G}_\sigma \subset W_\sigma, \ \varepsilon > 0).$$

На перекрывающихся частях σ функции $F_{(\lambda)_k\sigma}$ предполагаются согласованными между собой так, чтобы они подчинялись соответствующим классическим формулам преобразования от одной системы векторов $\bar{N}_{m_{k+1}}, \ldots, \bar{N}_n$ к другой и от одних переменных к другим, необходимым для того, чтобы были возможны равенства

$$\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m_{k+1}}^{\lambda_{m_{k+1}}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_\sigma = F_{(\lambda)_k\sigma} \tag{5}$$

для всех допустимых систем $(\lambda)_k$ и всех σ при одной и той же функции f.

В таком случае на R_n (следовательно, и на Ω) можно построить функцию f, удовлетворяющую трем требованиям:

$$1)\ f \in W_2^{(r)}(R_n;\ M^*);$$

$$2)\ M^* < c\Big(\sum_{\sigma}\sum_{(\lambda)_k}\big\| F_{(\lambda)_k\sigma}\big\|_{L_2(G\sigma)} + M\Big). \qquad (6)$$

3) *имеют место равенства* (5).

Доказательство. При помощи теоремы 2 ([5]) строим функцию $f \in H_{2,n}^{(r+\eta)}(M_1)$, где $\eta > 0$ зависит от ε, удовлетворяющую требованиям 2) и 3) (если заменить M^* на M_1). Нетрудно показать, что она в таком случае удовлетворяет и требованиям 1) и 2).

Если в этой теореме считать $\varepsilon < 0$, то она уже неверна. При $\varepsilon = 0$ можно указать примеры, когда построение функции, имеющей заданные граничные условия, возможно и невозможно. Такие примеры уже приводились в ([6], [7]) в случае круга и $r = 1, 2$.

Неравенство ([6]) влечет за собой, в силу минимального свойства, следующее неравенство для полигармонической функции, удовлетворяющей граничным условиям (5):

$$D(u) \leqslant c_1\Big(\sum_{\sigma}\sum_{(\lambda)_k}\big\| F_{(\lambda)_k\sigma}\big\|_{L_2(G\sigma)} + M\Big). \qquad (7)$$

Таким образом, если граничные условия мало изменить в смысле нормы, стоящей в правой части (7), то соответствующая полигармоническая функция u перейдет в другую u_1 так, что $D(u - u_1)$ будет малым (устойчивость).

Изложенное можно рассматривать как обобщение соответствующих результатов* моих ([6]) и Т. И. Аманова ([7]), относящихся к случаю, когда $r = 1, 2$ и область Ω есть круг. Эти результаты были получены другим путем, при помощи аппарата рядов Фурье, что дало там возможность притти к более точным константам, входящим с соответствующие неравенства.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
17 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, ДАН, 4, 339 (1936). [2] С. Л. Соболев, Матем. сборн., 2 (44), 467 (1937). [3] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа к математической физике, 1950. [4] С. М. Никольский, ДАН, 88, № 1 (1953). [5] С. М. Никольский, ДАН, 88, № 2 (1953). [6] С. М. Никольский, ДАН, 83, № 1 (1952). [7] Т. И. Аманов, ДАН, 88, № 3 (1953).

* Пользуюсь случаем отметить, что в цитированной статье ([6]) допущена досадная описка. В формуле (4) правая часть неравенства напечатана: $M\,|h|^{1+\varepsilon}$, а на самом деле следует: $M\,|h|^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$.