Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. Г. КРЕЙН

О ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 XI 1952)

В качестве одного из приложений метода направляющих функционалов [1,2] нами было получено в 1945 г. следующее предложение: *Для того чтобы непрерывная функция* $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t < 2l)$ *допускала представление*

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda}\, t}{\lambda}\, d\tau(\lambda), \tag{1}$$

где $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty;\ \tau(0) = 0)$ — *некоторая неубывающая функция, необходимо и достаточно, чтобы ядро* $\Phi(t+s) - \Phi(|t-s|)$ $(0 \leqslant s, t < l)$ *было положительно определенным.*

Оказывается, теория представления функций в виде (1) дает ключи к решению основных вопросов так называемой обратной краевой задачи (для одномерных уравнений второго порядка).

1. Пусть $0 < l \leqslant \infty$, а $q(x)$ и $\rho(x)$ $(0 \leqslant x < l)$ — функции, измеримые и суммируемые в каждом интервале $(0, a)$, где $a < l$; пусть, кроме того, функция $\rho(x) \geqslant 0$ $(0 \leqslant x < l)$ и ни на каком подинтервале интервала $(0, l)$ не обращается в нуль почти всюду.

Выбрав какое-либо вещественное h, рассмотрим дифференциальную систему:

$$y'' - q(x)\, y + \lambda\rho(x)\, y = 0, \quad y'(0) - hy(0) = 0, \tag{2}$$

где λ — комплексный параметр. Пусть $\varphi(x; \lambda)$ $(0 \leqslant x < l)$ — решение этой системы, нормированное условиями:

$$\varphi(0; \lambda) = 1, \quad \varphi'(0; \lambda) = h. \tag{3}$$

Обозначим через $\sigma(x)$ $(0 \leqslant x < l)$ интеграл от $\rho(x)$ в пределах от 0 до x, а через L_σ — гильбертово пространство всех σ-измеримых функций $f(x)$ $(0 \leqslant x < l)$, имеющих σ-интегрируемый квадрат:

$$\int_0^l |f(x)|^2\, d\sigma(x) < \infty.$$

Через L_σ^0 обозначим совокупность обрывающихся функций $f \in L_\sigma$ (функция $f \in L_\sigma$ называется обрывающейся, если она в некоторой левой окрестности конца $x = l$ обращается тождественно в нуль).

Как известно, функция $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty;\ \ \tau(0) = 0)$ называется спектральной функцией системы (2), если отображение U_τ: $f \to F$, где $f \in L_\sigma^0$, а

$$F(\lambda) = \int_0^l f(x)\, \varphi(x; \lambda)\, d\sigma(x) \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

есть изометрическое отображение L_σ^0 в гильбертово пространство L_τ функций τ-измеримых и имеющих τ-интегрируемый квадрат.

Обозначим через S_h совокупность всех спектральных функций τ системы (2).

Изометрическое отображение U_τ однозначно расширяется до изометрического отображения $\tilde{U}_\tau$ всего L_σ в L_τ.

Спектральная функция τ называется ортогональной, если $\tilde{U}_\tau$ отображает все L_σ на все L_τ.

Теорема 1. *Для любого* $\tau \in S_h$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos \sqrt{\lambda}\, t)\, \varphi^2(x; \lambda)}{\lambda}\, d\tau(\lambda) < \infty \tag{4}$$

при

$$0 \leqslant x < l, \quad 0 \leqslant t < 2\int_x^l \sqrt{\rho(\xi)}\, d\xi. \tag{5}$$

Более того, интеграл (4) *сходится равномерно в каждой замкнутой части области* (5).

Теорема 1 была подсказана некоторыми соображениями механического характера.

Представим себе, что между точками 0 и l единичной силой натянута струна, элемент dx которой имеет массу $d\sigma = \rho\, dx$ и подпирается упругим основанием с силой $q(x)\, y(x)\, dx$ ($y(x)$ — поперечный прогиб струны). Пусть при этом левый конец струны может свободно скользить по дуге, кривизна которой равна h. Тогда интеграл (4) будет давать перемещение точки x за время t под действием единичной силы, приложенной в этой точке к первоначально покоившейся струне.

Второе условие в (5) становится понятным, если учесть, что интеграл от $\sqrt{\rho(\xi)}$ в пределах от x до l есть время пробега от x до l волны, вызванной силой, приложенной в точке x.

Заметим, что все предыдущие определения сохраняют смысл, если граничное условие в (2) заменить условием $y(0) = 0$ и, соответственно, функцию φ нормировать условиями $\varphi(0; \lambda) = 0$, $\varphi'(0; \lambda) = 1$. Для этого случая теорема 1 также справедлива.

2. Если в (4) положить $x = 0$, то мы убедимся в сходимости интеграла, фигурирующего в следующем предложении:

Теорема 2. *Значения функции*

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda}\, t}{\lambda}\, d\tau(\lambda) \tag{6}$$

при

$$0 \leqslant t < 2T \quad \left(T = \int_0^l \sqrt{\rho(x)}\, dx\right)$$

не зависят от выбора функции $\tau \in S_h$.

Функцию $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t < 2T)$ будем называть переходной функцией системы (2).

Теорема 3. *Функциями $\tau \in S_h$ исчерпываются все неубывающие функции $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty;\ \tau(0) = 0)$, дающие представление функции $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t < 2T)$ в виде* (6).

Используя один недавний результат Б. М. Левитана и Н. Н. Меймана [3], можно, на основании теоремы 3, утверждать, что если для некоторой спектральной функции τ системы (2) с $T = \infty$ выполняется условие

$$\log\left(\int_{-\infty}^{0} \exp\left(\sqrt{|\lambda|}\, t\right) d\tau(\lambda)\right) = O(t^2) \quad \text{при } t \to \infty, \tag{7}$$

то она является единственной (а следовательно, и ортогональной) спектральной функцией системы (2).

Для случая $l = \infty$, $\rho(x) \equiv 1$ $(0 \leqslant x < \infty)$ условие (7) указано в заметке [3], но только как признак ортогональности (а не единственности) спектральной функции τ.

Общая теорема 4 из [2] дает немедленно следующий результат (ср. с [4], стр. 344—347).

Теорема 4. *Для того чтобы $\tau \in S_h$ была ортогональной спектральной функцией, необходимо и достаточно, чтобы линейная оболочка функций*

$$f_t(\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} \qquad (0 < t < T)$$

была плотной в L_τ.

3. Заметим, что для случая дифференциальной системы

$$y'' - q(x)\, y + \lambda y = 0; \quad y'(0) - hy(0) = 0 \quad (0 \leqslant x < l) \tag{8}$$

сходимость интеграла (6) при $0 \leqslant t < 2l$ в пределах от $-\infty$ до 0 была установлена В. А. Марченко [5], а в пределах от 0 до ∞ — еще раньше Б. М. Левитаном [6].

В случае (8) можно дать правило непосредственного построения функции $\Phi(t)$ при помощи некоторого решения соответствующего уравнения в частных производных. Приведем это правило для случая $h = 0$, когда оно становится особенно простым. Пусть $u(\xi, \eta)$ $(0 \leqslant \xi, \eta < l)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + q(|\xi - \eta|)\, u = 0 \quad (0 \leqslant \xi, \eta < l),$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(0, \eta) = u(\xi, 0) = 1 \quad (0 \leqslant \xi, \eta < l).$$

Тогда

$$\Phi(t) = \int_0^t u\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) d\tau.$$

Аналогичное правило с некоторым усложнением получается для $h \neq 0$. Отсюда:

Теорема 5. *Переходная функция $\Phi(t)$ системы* (8) *имеет вторую абсолютную непрерывную производную, при этом $\Phi'(0) = 1$, $\Phi''(0) = -h$.*

Если $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t < 2l)$ имеет непрерывную или абсолютно непрерывную производную $\Phi^{(n+3)}(t)$ $(n \geqslant 0)$, то в этом и только этом *случае функция* $q(x)$ $(0 \leqslant x < 2l)$ *имеет непрерывную или, соответственно, абсолютно непрерывную производную* $q^{(n)}(x)$.

Менее законченный результат такого рода получен И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном в их важной работе [6]. Точно так же методы этих авторов позволили им приблизиться, но не позволили окончательно установить следующую теорему:

Теорема 6. *Для того чтобы данная неубывающая функция* $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty;\ \tau(0) = 0)$ *была спектральной функцией некоторой системы* (8), *необходимо и достаточно чтобы ей соответствовала по формуле* (6) *функция* $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t < 2l)$, *имеющая две абсолютно непрерывных производных, причем* $\Phi'(0) = 1$.

Заметим, что единственность определения константы h и функции $q(x)$ $(0 \leqslant x < l)$ по спектральной функции τ системы (8) доказана В. А. Марченко [5]. Он, правда, рассматривал только ортогональные спектральные функции τ, но от этого ограничения можно избавиться.

Поступило
4 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, 53, № 1 (1946). [2] М. Г. Крейн, Збірник праць Інституту матем. АН УРСР, № 10 (1948). [3] Б. М. Левитан, Н. Н. Мейман, ДАН, 81, № 5 (1951). [4] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15 (309) (1951). [5] В. А. Марченко, Тр. Московск. матем. об-ва, 1, (1952). [6] Б. М. Левитан, ДАН, 71, № 4 (1950).