

Н. Н. КРАСОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В ЦЕЛОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 XI 1952)

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1(x) + ay, \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x) + by.\end{aligned}\tag{1}$$

Везде в дальнейшем мы принимаем, что функции, входящие в правые части рассматриваемых систем, непрерывны, удовлетворяют условиям, обеспечивающим единственность решений, и в начале координат $x = y = 0$ обращаются в нуль.

Предположим, что функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ удовлетворяют неравенствам, аналогичным условиям Рауза—Гурвица для случая, когда система (1) линейна:

$$\frac{f_1(x)}{x} + b < 0 \quad \text{при } x \neq 0;\tag{2}$$

$$\frac{f_1(x)}{x} b - \frac{f_2(x)}{x} a > 0 \quad \text{при } x \neq 0.\tag{3}$$

В работах (1-3) рассмотрен случай, когда система (1) содержит одну нелинейную функцию и даны достаточные условия для того, чтобы решение $x \equiv y \equiv 0$ обладало свойством устойчивости в большом. В статье (4) даны достаточные условия устойчивости в большом для системы (1).

Здесь мы формулируем необходимые и достаточные условия, которые следует наложить на функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, удовлетворяющие неравенствам (2) и (3), для того, чтобы начало координат $x = y = 0$ было для системы (1) точкой асимптотически устойчивого равновесия при любых начальных возмущениях.

Теорема 1. *Дана система (1). Пусть $a \neq 0$ и функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ удовлетворяют условиям (2) и (3). Тогда для того, чтобы начало координат $x = y = 0$ было точкой асимптотически устойчивого равновесия при любых начальных возмущениях, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[(f_1(x) + bx) \cdot \text{sign } x - \int_0^x (f_1(x) b - f_2(x) a) dx \right] = -\infty.\tag{4}$$

Доказательство. При помощи неособого линейного преобразования $x = x$, $z = ay - bx$ приведем систему (1) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi_1(x) + z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\varphi_2(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi_1(x) = f_1(x) + bx$, $\varphi_2(x) = f_1(x)b - f_2(x)a$.

Кривая

$$z = -\varphi_1(x) \quad (\gamma)$$

разбивает плоскость x, z на две части. Выше кривой (γ) $dx/dt > 0$, ниже кривой $dx/dt < 0$. Вследствие (3) в полуплоскости $x > 0$ $dz/dt < 0$, в области $x < 0$, напротив, $dz/dt > 0$.

Докажем сначала достаточность условия (4). Обозначим траекторию системы (5), проходящую через точку $p(x_p, z_p)$, символом $f(p, t)$. Начало координат $x = y = 0$ обозначим O . Следует доказать, что при выполнении условий (2), (3) и (4) имеет место

$$\lim f(p, t) = 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

для всех p . Не уменьшая общности, примем, что p лежит выше кривой (γ) и $x_p > 0$. Покажем, что наступит момент $t = t_1$, когда $f(p, t)$ пересечется с кривой (γ) . Действительно, вследствие (4) выполнится по крайней мере одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f_1(x) + bx) = -\infty \quad \text{при } x \rightarrow \infty; \quad (6)$$

$$\lim \int_0^x (f_1(x)b - f_2(x)a) dx = \infty \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7)$$

В первом случае наше утверждение очевидно, ибо в рассматриваемой области $z(t) \leq z_p$. Рассмотрим случай (7). Из (5) имеем

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x) + z}. \quad (8)$$

Так как, однако, в рассматриваемой области $\varphi_1(x) < 0$, $z \leq z_p$, то

$$\frac{dz}{dx} < -\frac{\varphi_2(x)}{z_p}$$

или

$$z < -\frac{1}{z_p} \int_0^x \varphi_2(x) dx,$$

что, вследствие (7), и доказывает наше утверждение. При дальнейшем движении $f(p, t)$ либо примыкает к началу координат, либо пересекает полуось $x = 0$, $z < 0$.

Аналогично, рассматривая поведение $f(p, t)$ в области $x < 0$, убедимся, что либо она примыкает при $t \rightarrow \infty$ к началу координат, либо пересекает полуось $x = 0$, $z > 0$.

Нетрудно также проверить, что при $t < 0$ $f(p, t)$ пересекается с полуосью $x = 0$, $z > 0$. Таким образом, для доказательства теоремы следует лишь рассмотреть случай, когда $f(p, t)$ пересекает ось $x = 0$, $z > 0$ в точках $A = f(p, t_1)$ и $B = f(p, t_2)$. Покажем, что $z_A > z_B$ при $t_2 > t_1$. В самом деле, вычислим интеграл $\oint P dz - Q dx$, где

$Q(x, z) = -\varphi_2(x)$, $P(x, z) = \varphi_1(x) + z$ вдоль контура L , состоящего из отрезка BA и дуги AB траектории $f(p, t)$. Применяя формулу

$$\oint_L Q(x, z) dx - P(x, z) dz = \iint_{\Gamma} d_x P dz + d_z Q dx \quad (9)$$

из работы (1) (стр. 466) и учитывая (2), убедимся, что $\oint_L P dz - Q dx > 0$, что возможно лишь при $z_A > z_B$. Таким образом, $f(p, t)$ при $t > 0$ ограничена, и система (5) не имеет периодических решений.

Рассмотрим ω -предельное множество $f(p, t)$. Предположим, что оно содержит траектории, отличные от O . Пусть $f(q, t)$ — одна из таких траекторий. На основании теоремы 4' ((5), стр. 54) ω -предельное множество $f(q, t)$ состоит из особых точек, т. е. в данном случае совпадает с началом координат. Применяя (9), убедимся, что O не может быть α -предельной точкой $f(q, t)$, т. е. $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(q, t) = \infty$ при $t \rightarrow -\infty$, что означает, что $f(q, t)$ не может принадлежать ω -множеству $f(p, t)$, так как последнее ограничено. Итак, это множество состоит из одной точки O , что и доказывает достаточность (4).

Для доказательства необходимости (4) покажем, что при выполнении неравенств

$$\varphi_1(x) > -M; \quad -\int_0^x \varphi_2(x) dx > -M \quad \text{при } x > 0 \quad (10)$$

(мы принимаем для определенности, что (4) нарушается при $x > 0$) система (5) имеет траекторию, уходящую в бесконечность при $t \rightarrow \infty$. Пусть точка p имеет координаты $x_p = 0$, $z_p > 3M + 2$. Все время, пока $f(p, t)$ лежит в области $z > 2M$, будет, вследствие (8) и (10),

$$z(t) > z_p - M - \frac{1}{M} \int_0^x \varphi_2(x) dx > 2M + 1, \quad (11)$$

что и доказывает наше утверждение, так как из (11) следует, что неравенство $z(t) > 2M$ не может нарушиться ни при каких $t > 0$, т. е. при $t > 0$ будет $dx/dt > 0$. Теорема доказана.

Замечание. Так как система (5) совпадает по виду с системой, к которой преобразованием Лизэнара (5) приводится исследование уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \quad (12)$$

то, с одной стороны, теорема 1 непосредственно переносится на (12), следует лишь в формулировке ее заменить $bf_1(x) - af_2(x)$ на $g(x)$ и $f_1(x) + bx$ на $-\int_0^x f(x) dx$, а с другой стороны, на систему (1) переносятся критерии существования периодических решений, доказанные для уравнения (12) ((5), стр. 153).

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + f_1(y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x) + by. \end{aligned} \quad (13)$$

В работе (2) показано, что в случае, когда система (13) содержит одну нелинейную функцию, для наличия устойчивости в большом достаточно выполнения условий

$$a + b < 0; \quad (14)$$

$$ab - \frac{f_1(y)}{y} \frac{f_2(x)}{x} > 0 \quad \text{при } x \neq 0, y \neq 0, \quad (15)$$

соответствующих условиям Рауза — Гурвица для линейной системы. Аналогично предыдущему можно доказать теоремы, являющиеся некоторым обобщением этого результата.

Теорема 2. Пусть $ab \neq 0$. Если выполнены условия (14), (15) и по крайней мере одна из функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ не меняет знака при $z > M$ или $z < -M$, где M — достаточно большое положительное число, то решение $x \equiv y \equiv 0$ системы (13) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Теорема 3. Пусть $b = 0$. Если выполнены условия (14), (15) и

$$\lim \left| \int_0^y f_1(y) dy \right| = \infty \quad \text{при } |y| \rightarrow \infty, \quad (16)$$

то решение $x \equiv y \equiv 0$ системы (13) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

В заключение рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x) + ay, \\ \frac{dy}{dt} &= bx + f_2(y). \end{aligned} \quad (17)$$

Теорема 4. Если обе функции $f_1(x)$, $f_2(y)$ не являются линейными и удовлетворяют условиям

$$\frac{f_1(x)}{x} + \frac{f_2(y)}{y} < 0 \quad \text{при } x \neq 0, y \neq 0; \quad (18)$$

$$\frac{f_1(x)}{x} \frac{f_2(y)}{y} - ab > 0 \quad \text{при } x \neq 0, y \neq 0, \quad (19)$$

то тривиальное решение $x \equiv y \equiv 0$ системы (17) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Примечание. В случае, когда функции $f_1(x)$, $f_2(y)$ обе линейны, (18) и (19) — условия Рауза — Гурвица. Если же система (17) содержит одну нелинейную функцию, то при условиях (18) и (19) вопрос об устойчивости решается теоремой 1.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
29 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. П. Еругин, Прикладн. матем. и мех., 14, в. 5 (1950). ² Н. П. Еругин, там же, 14, в. 6 (1950). ³ И. Г. Малкин, там же, 16, в. 3 (1952). ⁴ Н. Н. Красовский, там же, 16, в. 5 (1952). ⁵ В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2-е, М.—Л., 1949.