

И. Л. КАРОЛЬ

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 XI 1952)

В ряде работ достаточно полно разработана теория уравнений смешанного эллипτικο-гиперболического типа с двумя независимыми переменными в том случае, когда параболическая линия уравнения не является его характеристикой.

Рассмотрим некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа:

$$u_{xx} + u u_{yy} + \alpha u_y = 0 \quad (1)$$

( $\alpha$  — вещественная постоянная), параболическая линия которого — ось  $y = 0$  — является огибающей обонх семейств его характеристик:

$$\xi = x - 2\sqrt{-y} = \text{const}; \quad \eta = x + 2\sqrt{-y} = \text{const}. \quad (2)$$

В полуплоскости  $y < 0$  после перехода к переменным  $\xi$  и  $\eta$  ( $\eta \geq \xi$ ) уравнение (1) приведетс к уравнению Эйлера — Дарбу:

$$u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi} (u_\eta - u_\xi) = 0, \quad (3)$$

где  $\beta = \alpha - 0,5$ .

Будем определять решение уравнения (1) в области  $\Omega$ , ограниченной: двумя характеристиками (2) разных семейств  $AC$  и  $BC$ , выходящими из точки  $C$  в полуплоскости  $y < 0$  и касающимися оси  $y = 0$  в точках  $A$  и  $B$ ; простой кривой  $\Gamma$ , лежащей целиком в полуплоскости  $y > 0$  и опирающейся на отрезок  $AB$  оси  $y = 0$ , который без ограничения общности считаем совпадающим с промежутком  $[0, 1]$  оси  $x$ . Часть области  $\Omega$ , лежащую в полуплоскости  $y > 0$  ( $y < 0$ ), обозначим  $\Omega_+$  ( $\Omega_-$ ).

Задача М. Найти функцию  $u(x, y)$ , непрерывную в  $\bar{\Omega}$  ( $u \in C\bar{\Omega}$ ), дважды непрерывно дифференцируемую в  $\Omega_+$  и в  $\Omega_-$  ( $u \in C^{(2)}\Omega_+$ ,  $u \in C^{(2)}\Omega_-$ ) и удовлетворяющую там уравнению (1), по заданным ее непрерывным краевым значениям на границе области  $\Omega$ :

$$u|_\Gamma = \varphi(s) \quad (4)$$

( $s$  — длина дуги  $\Gamma$ , отсчитываемая от  $B$  к  $A$ ;  $l$  — длина  $\Gamma$ ).

$$u|_{AC} = u|_{\xi=0} = \psi_1(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1; \quad u|_{BC} = u|_{\eta=1} = \psi_2(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (5)$$

Нетрудно доказать, что решение задачи М уравнения (1) существует и единственно при  $\alpha < 0$  и при непрерывных краевых данных

на кривой  $\Gamma$  и характеристиках  $AC$  и  $BC$ . На  $\Gamma$  накладываются лишь условия, обычные для границы области при решении задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа.

Укажем идею доказательства. Сначала в области  $\Omega_-$  (или в плоскости  $\xi, \eta$ , в треугольнике  $ABC$ ,  $0 \leq \xi \leq \eta \leq 1$ ) для уравнения (1) (или (3)) решается задача Гурса при краевых условиях (5). Решение находится способом Римана и оказывается непрерывным в замкнутой области  $\bar{\Omega}_-$ . В частности, определяется функция  $\tau(x) = u(x, 0)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , — значение решения на отрезке  $AB$  оси  $y = 0$ .

В области  $\Omega_+$  решение задачи  $M$  определится из решения задачи Дирихле для уравнения (1) при краевых условиях: условия (4) и условия

$$u|_{AB} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6)$$

Существование решения этой задачи в области  $\Omega_+$ , ограниченной произвольной гладкой кривой  $\Gamma$ , и при  $\alpha < 1$  было доказано М. В. Келдышем<sup>(1)</sup>. Несколько изменив его доказательство, можно освободиться от условия гладкости кривой  $\Gamma$ .

В силу очевидной единственности решения задачи Гурса и решения задачи Дирихле (принцип максимума для уравнения (1) в  $\Omega_+$ ) решение задачи  $M$  также единственно.

Исследуем свойства производных решения задачи  $M$  в окрестности внутренних точек отрезка  $AB$  параболической линии.

Если функции  $\psi_1(\eta)$  и  $\psi_2(\xi)$  в краевых условиях (5) непрерывны с первыми производными на  $AC$  и  $BC$  ( $\psi_1(\eta) \in C^{(1)}[0, 1]$ ,  $\psi_2(\xi) \in C^{(1)}[0, 1]$ ) и имеют там вторые производные, непрерывные кроме точек  $A$  и  $B$ , где они могут обращаться в бесконечность порядка меньшего единицы (условия  $C$ ), то производные  $u_{-x}$ ,  $u_{-y}$ ,  $u_{-xx}$  решения  $u_-(x, y)$  задачи Гурса уравнения (1) в области  $\Omega_-$  при  $\alpha < 0$  непрерывны вплоть до внутренних точек  $AB$ . Их предельные значения на  $AB$ :  $\lim u_{-y} = v_-(x_0)$  и  $\lim u_{-xx} = \tau''_-(x_0)$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, -0)$  ( $0 < x_0 < 1$ ), связаны соотношением

$$\tau''_-(x_0) + \alpha v_-(x_0) = 0, \quad 0 < x_0 < 1. \quad (7)$$

При выполнении условий  $C$  функция  $\tau(x)$  имеет следующие свойства:  $\tau(x) \in C^{(1)}[0, 1]$  и имеет вторую производную  $\tau''(x)$  непрерывную на  $(0, 1)$  и интегрируемую. Для такой функции  $\tau(x)$  в краевом условии (6) задачи Дирихле уравнения (1) в области  $\Omega_+$  производные  $u_{+x}$ ,  $u_{+y}$ ,  $u_{+xx}$  решения  $u_+(x, y)$  этой задачи при  $\alpha < 0$  также непрерывны вплоть до внутренних точек отрезка  $AB$ , и их предельные значения на  $AB$ :

$$\lim u_{+y} = v_+(x_0) \quad \text{и} \quad \lim u_{+xx} = \tau''_+(x_0) \quad \text{при} \quad (x, y) \rightarrow (x_0, +0)$$

$$(0 < x_0 < 1)$$

связаны аналогичным соотношением:

$$\tau''_+(x_0) + \alpha v_+(x_0) = 0, \quad 0 < x_0 < 1. \quad (8)$$

По известной теореме анализа<sup>(2)</sup> имеем  $\tau''_+(x) = \tau''_-(x) = \tau''(x)$ , и из (7) и (8) следует:  $v_+(x) = v_-(x)$  при  $0 < x < 1$ . Таким образом, если  $\psi_1(\eta)$  и  $\psi_2(\xi)$  в условиях (5) удовлетворяют условиям  $C$ , то решение  $u(x, y)$  задачи  $M$  уравнения (1) при  $\alpha < 0$  имеет во внутренних точках

отрезка  $AB$   $[0, 1]$  параболической линии (которая является также характеристикой уравнения (1)) непрерывные производные  $u_x, u_y$  и  $u_{xx}$  и, подобно решению уравнения гиперболического типа, удовлетворяет там характеристическому соотношению:  $\tau''(x) + \alpha v(x) = 0$ .

Для уравнения (1) при  $0 < \alpha < 1$  можно поставить следующую краевую задачу Т (Трикоми).

Задача Т. Найти непрерывную в области  $\bar{\Omega}$  функцию  $u(x, y)$  такую, что: 1)  $u \in C^2(\Omega_+)$  и  $u \in C^{(2)}\Omega_-$  и удовлетворяет там уравнению (1), или  $u \in C^{(1)}\Omega_-$  и является там обобщенным решением (1), определенным ниже; 2) производная  $u_x$  решения непрерывна во внутренних точках отрезка  $AB$  параболической линии, а производная  $u_y$  удовлетворяет там следующему условию «склеивания»:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, +0)} y^\alpha u_y = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, -0)} (-y)^\alpha u_y = v^*(x_0) \quad 0 < x_0 < 1; \quad (9)$$

3) краевые значения  $u(x, y)$  заданы на незамкнутом контуре  $\Gamma + AC$ :

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l; \quad u|_{\xi=0} = \psi(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (10)$$

где  $\varphi(s) \in C[0, l]$  и в окрестности точек  $A$  и  $B$  имеет производную  $\varphi'(s)$ , непрерывную вплоть до этих точек, а  $\psi(\eta) \in C^{(2)}[0, 1]$ .

Условие (9) вводится здесь вместо условия непрерывности  $u_y$  во внутренних точках  $AB$ , существенного в задаче Т для других уравнений смешанного типа <sup>(3, 4)</sup>, так как производная  $u_y$  решения задачи Т уравнения (1) при  $0 < \alpha < 1$  может, вообще говоря, и при гладких краевых значениях быть неограниченной на параболической линии, причем имеет место оценка:  $u_y = O(|y|^{-\alpha})$  ( $0 < x < 1$ ).

Если ввести взаимно-однозначную, непрерывную и непрерывно дифференцируемую вне оси  $y = 0$  замену переменных:

$$x = x, \quad t = \text{sign } y \cdot (1 - \alpha)^{2(\alpha-1)} |y|^{1-\alpha} \quad (t = 0 \text{ при } y = 0), \quad (11)$$

то в плоскости  $x, t$  условие (9) переходит в условие непрерывности  $u_t$  во внутренних точках  $AB$ , а уравнение (1) приводится к уравнениям:

$$a) \quad u_{xx} + \text{sign } t \cdot |t|^m u_{tt} = 0 \quad (12)$$

при  $0 < \alpha < 0,5$ , где  $m = (1 - 2\alpha)/(1 - \alpha)$ ,  $0 < m < 1$ ;

$$б) \quad u_{xx} + \text{sign } t \cdot u_{tt} = 0 \text{ при } \alpha = 0,5 \quad (13)$$

$$в) \quad \text{sign } t \cdot |t|^n u_{xx} + u_{tt} = 0 \text{ при } 0,5 < \alpha < 1, \quad (14)$$

где  $n = (2\alpha - 1)/(1 - \alpha)$ ,  $n > 0$ .

Таким образом, решение поставленной выше задачи для уравнения (1) при  $0 < \alpha < 1$  переходом в плоскость  $x, t$  может быть сведено к решению задачи Т для уравнений (12) — (14) в классе функций  $u(x, t)$  таких, что  $u \in C\Omega^*$  и  $u \in C^{(1)}\Omega^*$  (область  $\Omega^*$  есть отображение  $\Omega$  в плоскости  $x, t$ ). Существование и единственность решения задачи Т для уравнения (12) в случае специальной кривой  $\Gamma$  было установлено в нашей заметке <sup>(3)</sup>, для уравнения (13) в общем случае в работе <sup>(4)</sup> и для уравнения (15) в работах <sup>(5)</sup>. Обобщенное решение (1) в  $\Omega_-$  и ограничения в вышеприведенной формулировке задачи Т уравнения (1) определяются так, что в плоскости  $x, t$  они переходят в обобщенное решение и условия, для которых справедливы указанные теоремы существования и единственности.

Можно показать, что при  $\alpha > 1$  само решение уравнения (1), вообще говоря, неограничено на параболической линии и поэтому менее интересно для возможных приложений.

Поступило  
1 XI 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 2 (1951). <sup>2</sup> В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, М.—Л., 1951, стр. 489. <sup>3</sup> И. Л. Кароль, ДАН, 88, № 2 (1952).  
<sup>4</sup> М. А. Лаврентьев, А. В. Бицадзе, ДАН, 70, № 3 (1950). <sup>5</sup> S. Gellerstedt, Sur un problème aux limites, pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte, Upsala, 1935.