Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

АССОЦИАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ, ВСЯКАЯ ПОДСИСТЕМА КОТОРЫХ ИМЕЕТ ЕДИНИЦУ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 XI 1952)

1. Единицей ассоциативной системы («системы») $\mathfrak{G}$ называется такой ее элемент E, что для любого $G \in \mathfrak{G}$ $EG = GE = G$.

Всякая система имеет, очевидно, не более одной единицы, но, как известно, существуют системы и без единиц.

Если непустая система $\mathfrak{H}$ содержится в системе $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{H}$ называется подсистемой $\mathfrak{G}$.

В настоящей заметке описываются все системы, в которых каждая подсистема имеет единицу, и указываются некоторые свойства этих систем. Для краткости такие системы будем далее называть системами с единицами подсистем (СЕП).

Элемент G системы $\mathfrak{G}$ называется идемпотентом, если $G^2 = G$ Очевидно, единицы системы и ее подсистем являются идемпотентами. Множество всех идемпотентов системы $\mathfrak{G}$ будем обозначать через $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$.

Определим на $\mathfrak{G}$ отношение делимости следующим образом: элемент G_1 делится на элемент G_2, если в $\mathfrak{G}$ разрешимы оба уравнения: $G_1 = G_2X$ и $G_1 = YG_2$.

Теорема 1. *Если $E_1, E_2 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ и E_1 делится на E_2, то $E_1E_2 = E_2E_1 = E_1$.*

Доказательство. По условию, существуют такие $X, Y \in \mathfrak{G}$, что $E_1 = E_2X$ и $E_1 = YE_2$. Поэтому

$$E_1E_2 = (YE_2)E_2 = Y(E_2E_2) = YE_2 = E_1,$$

и аналогично $E_2E_1 = E_1$, а это и требовалось.

Следствие. *Отношение делимости является на $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ отношением частичного упорядочения.*

В самом деле, рефлексивность и транзитность отношения делимости идемпотентов очевидны. Далее, из делимости идемпотента E_1 на идемпотент E_2 следует $E_1E_2 = E_1$, а из делимости E_2 на E_1 $E_1E_2 = E_2$, так что это отношение и антисимметрично, и требуемое доказано.

2. Теорема 2. *Для того чтобы система $\mathfrak{G}$ была СЕП, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ являлась теоретико-множественной суммой попарно непересекающихся периодических групп, а $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ было бы по делимости вполне упорядоченным множеством.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{G}$ СЕП и $G \in \mathfrak{G}$ элементы $G, G^2, G^3, \ldots$ образуют подсистему $\{G\}$ системы $\mathfrak{G}$. Пусть n — наименьшее число, для которого G^n является единицей $\{G\}$.

Тогда, как легко проверить, $\{G\}$ является циклической группой порядка n.

Таким образом, всякий элемент $\mathfrak{G}$ содержится в некоторой конечной циклической подгруппе. Отсюда следует ([1]), что $\mathfrak{G}$ является теоретико-множественной суммой попарно непересекающихся групп, которые, очевидно, оказываются периодическими.

Докажем теперь полную упорядоченность $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ отношением делимости. Сначала докажем (линейную) упорядоченность $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$. Так как частичная упорядоченность уже доказана, то нам остается показать, что при $E_1, E_2 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ либо E_1 делится на E_2, либо E_2 на E_1.

Рассмотрим для этого подсистему $\mathfrak{G}$, порожденную идемпотентами E_1 и E_2. Очевидно, она состоит из элементов вида

$$E_{i_1}E_{i_2}\ldots, E_{i_n} \quad (i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2;\ n \geqslant 1).$$

Пусть $E = E_{j_1}E_{j_2}\ldots E_{j_m}$ является единицей этой подсистемы. Тогда $E_{j_1}E = E_{j_1}$. Но, с другой стороны

$$E_{j_1}E = E_{j_1}(E_{j_1}E_{j_2}\ldots E_{j_m}) = (E_{j_1}E_{j_1})(E_{j_2}\ldots E_{j_m}) = E_{j_1}E_{j_2}\ldots E_{j_m} = E.$$

Следовательно, $E = E_{j_1}$, т. е., либо $E = E_1$, либо же $E = E_2$. В первом из этих случаев E_2 делится на E_1, а во втором E_1 на E_2. Упорядоченность $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ таким образом доказана.

Для доказательства полной упорядоченности $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ предположим, что в $\mathfrak{G}$ существует бесконечная последовательность идемпотентов

$$E_1, E_2, \ldots, E_m, \ldots \tag{1}$$

таких, что E_n делится на E_m при $m \geqslant n$. По теореме 1, тогда $E_n = E_nE_m = E_mE_n$. Последовательность (1), очевидно, образует подсистему $\mathfrak{G}$, не имеющую единицы, что противоречит предположению. Значит, множество $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ является вполне упорядоченным отношением делимости, и необходимость доказана.

Достаточность доказывается без труда. Пусть $\mathfrak{H}$ — подсистема $\mathfrak{G}$. Множество идемпотентов, содержащихся в $\mathfrak{H}$, непусто, так как уже среди степеней каждого элемента $\mathfrak{H}$ найдется идемпотент. Возьмем в $\mathfrak{H}$ идемпотент E, который не делится ни на какой отличный от себя идемпотент $\mathfrak{H}$. Ввиду полной упорядоченности $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ это сделать можно. Покажем, что E является единицей подсистемы $\mathfrak{H}$. Действительно, пусть $H \in \mathfrak{H}$. Подсистема $\{H\}$, порожденная элементом H, есть группа с единицей E_H, которая является идемпотентом и лежит в $\mathfrak{H}$. Следовательно, $E_HE = EE_H = E_H$. Но тогда

$$HE = (HE_H)E = H(E_HE) = HE_H = H = EH.$$

Этим теорема доказана.

3. На основании ([1]) и теоремы 2 всякую СЕП можно задать следующим образом. Возьмем вполне упорядоченное отношением $\leqslant$ множество Γ (обрываются возрастающие последовательности элементов Γ), каждому элементу α которого поставлена в соответствие периодическая группа $\mathfrak{G}_\alpha$ (если $\alpha \neq \beta$, то $\mathfrak{G}_\alpha \cap \mathfrak{G}_\beta = \Lambda$), а каждой паре элементов α, β $(\beta \leqslant \alpha)$ — гомоморфизм γ^{α}_{β} группы $\mathfrak{G}_\alpha$ в группу $\mathfrak{G}_\beta$, причем при $\delta \leqslant \beta \leqslant \alpha$

$$\gamma^{\beta}_{\delta}\gamma^{\alpha}_{\beta} = \beta^{\alpha}_{\delta},$$

а гомоморфизмы вида γ^{α}_{α} являются тождественными изоморфизмами. Произведение $G_\alpha G_\beta$ элементов $G_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha$ и $G_\beta \in \mathfrak{G}_\beta$ определяется при этом как их произведение в $\mathfrak{G}_\alpha$, если $\alpha=\beta$, и как $\gamma_\beta^\alpha G_\alpha G_\beta$, если $\beta<\alpha$ ($G_\alpha \gamma_\alpha^\beta G_\beta$ при $\alpha<\beta$). Из такого определения умножения непосредственно следует, что

$$(\beta \leqslant \alpha)\ \ \gamma_\beta^\alpha G_\alpha = E_\beta G_\alpha = G_\alpha E_\beta \ \ (E_\beta \text{ — единица } \mathfrak{G}_\beta).$$

Вполне упорядоченное множество Г, группы $\mathfrak{G}_\alpha$ и гомоморфизмы γ_β^α составляют полную систему инвариантов системы $\mathfrak{G}$.

4. Непосредственно из определения СЕП следует, что всякая подсистема СЕП сама является СЕП. Покажем, что гомоморфизмы также не выводят из класса СЕП.

Теорема 3. *Если $\mathfrak{G}$ есть СЕП и φ — гомоморфизм $\mathfrak{G}$, то система $\varphi\mathfrak{G}$ также является СЕП.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}$ — подсистема $\varphi\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ полный φ-прообраз $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{G}$. Очевидно, $\mathfrak{H}$ является подсистемой $\mathfrak{G}$. Пусть E — единица $\mathfrak{H}$. Покажем, что φE есть единица $\mathfrak{R}$. В самом деле, по любому $R \in \mathfrak{R}$ найдется такое $H \in \mathfrak{H}$, что $\varphi H = R$. Значит,

$$\varphi E R = \varphi E \varphi H = \varphi(EH) = \varphi H = R,$$

и аналогично $R\varphi E = R$.

Идеалы СЕП описываются следующей теоремой.

Теорема 4. *Для того чтобы подмножество $\mathfrak{T}$ СЕП $\mathfrak{G}$ было ее идеалом, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\alpha \in \Gamma$*

$$\mathfrak{T} = \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} \mathfrak{G}_\beta.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{T}$ — идеал $\mathfrak{G}$. Являясь подсистемой $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{T}$ обладает единицей E. Пусть $E \in \mathfrak{G}_\alpha$. Так как E является единицей подсистемы $\bigcup\limits_{\beta\leqslant\alpha} \mathfrak{G}_\beta$, то эта подсистема содержится в $\mathfrak{T}$. Если при этом $\mathfrak{T} \ni G_\delta$, $G_\delta \in \mathfrak{G}_\delta$, $\delta > \alpha$, то $EG_\delta \in \mathfrak{G}_\alpha$, и потому $EG_\delta \neq G_\delta$, чего не может быть. Этим необходимость доказана; достаточность же очевидна.

Перечислим все автоморфизмы СЕП.

Теорема 5. *Для того чтобы отображение Φ СЕП $\mathfrak{G}$ в себя было автоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы Φ было автоморфизмом на каждой из групп $\mathfrak{G}_\alpha$ и коммутировало со всеми гомоморфизмами γ_β^α.*

Для задания произвольного автоморфизма СЕП $\mathfrak{G}$ достаточно указать автоморфизмы φ_α каждой из групп $\mathfrak{G}_\alpha$, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_\beta^\alpha \varphi_\alpha G_\alpha = \varphi_\beta \gamma_\beta^\alpha G_\alpha \quad (G_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha) \tag{2}$$

при любых α и β $(\beta \leqslant \alpha)$; такое задание единственно.

Доказательство. Необходимость. Пусть Φ — некоторый автоморфизм СЕП $\mathfrak{G}$. Поскольку при автоморфизме идемпотент переходит в идемпотент, Φ должно быть автоморфизмом и на $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$. Ввиду полной упорядоченности $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ Φ должен быть на $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ тождественным отображением.

Пусть E_α — единица $\mathfrak{G}_\alpha$, G_α — произвольный элемент этой группы. Если $\Phi G_\alpha \in \mathfrak{G}_\beta$ $(\beta \neq \alpha)$, то, очевидно, и все Φ-образы степеней G_α лежат в $\mathfrak{G}_\beta$; в частности, и $\Phi E_\alpha \in \mathfrak{G}_\beta$. Следовательно, каждая из групп $\mathfrak{G}_\alpha$ инвариантна относительно автоморфизма Φ, и Φ является, таким образом, автоморфизмом на каждой из этих подгрупп. Наконец,

$$\gamma_\beta^\alpha \Phi G_\alpha = E_\beta \Phi G_\alpha = \Phi E_\beta \Phi G_\alpha = \Phi(E_\beta G_\alpha) = \Phi \gamma_\beta^\alpha G_\alpha.$$

Достаточность. Пусть Φ является автоморфизмом φ_α на каждой из групп $\mathfrak{G}_\alpha$. Перестановочность его с гомоморфизмами γ_β^α записывается в виде (2). Одно-однозначность Φ очевидна. Кроме того (считая для определенности $\alpha \geqslant \beta$),

$$\Phi(G_\alpha G_\beta) = \Phi(G_\alpha E_\beta G_\beta) = \Phi(\gamma_\beta^\alpha G_\alpha G_\beta) = \varphi_\beta(\gamma_\beta^\alpha G_\alpha G_\beta) =$$
$$= (\varphi_\beta \gamma_\beta^\alpha G_\alpha)\varphi_\beta G_\beta = (\gamma_\beta^\alpha \varphi_\alpha G_\alpha)\varphi_\beta G_\beta = (\varphi_\alpha G_\alpha E_\beta)\varphi_\beta G_\beta =$$
$$= \varphi_\alpha G_\alpha \varphi_\beta E_\beta \varphi_\beta G_\beta = \varphi_\alpha G_\alpha \varphi_\beta (E_\beta G_\beta) = \varphi_\alpha G_\alpha \varphi_\beta G_\beta = \Phi G_\alpha \Phi G_\beta.$$

Единственность задания Φ при помощи автоморфизмов φ_α очевидна, и вся теорема доказана.

5. Систему $\mathfrak{G}$ назовем локально-СЕП, если всякая ее подсистема, порожденная конечным подмножеством $\mathfrak{G}$, является СЕП.

Теорема 6. *Для того чтобы система $\mathfrak{G}$ была локально-СЕП, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ была теоретико-множественной суммой попарно непересекающихся периодических групп, а $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ было упорядоченным по делимости множеством.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Задание таких систем отличается от задания СЕП только тем, что в качестве Γ берется произвольное упорядоченное множество.

Пусть теперь G — система с единицей E. Е. С. Ляпин в ([2]) пользуется определением подсистемы системы $\mathfrak{G}$ как подмножества $\mathfrak{G}$, замкнутого относительно определенного в $\mathfrak{G}$ действия и содержащего E. Для случая периодических групп такое определение подсистемы, очевидно, эквивалентно приведенному выше. Покажем обратное.

Теорема 7. *Если всякая подсистема системы $\mathfrak{G}$ содержит единицу $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ является периодической группой.*

Доказательство. Очевидно в условиях теоремы $\mathfrak{G}$ есть СЕП. Всякий ее идемпотент является ее одноэлементной подсистемой, и потому должен совпадать с ее единицей. Значит, $\mathfrak{G}$ имеет ровно один идемпотент, т. е., по теореме 2, является группой.

Поступило
26 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. H. Clifford, Ann. of Math., **42**, 1037 (1941). [2] Е. С. Ляпин, Матем. сборн., **20** (62) : 3, 497 (1947).