

Т. И. АМАНОВ

К РЕШЕНИЮ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 X 1952)

Рассмотрим бигармоническую задачу для единичного круга σ с центром в начале координат: найти функцию $u(\rho, \theta)$, удовлетворяющую бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 u = 0 \quad (1)$$

и граничным условиям на окружности $\rho = 1$

$$u|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \quad u_\rho|_{\rho=1} = \psi(\theta). \quad (2)$$

Ей соответствует следующая вариационная задача: среди всех функций $u(\rho, \theta)$, имеющих на σ частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяющих граничным условиям (2), найти ту, для которой интеграл

$$D_2[u] \equiv \iint_{\sigma} \left[u_{\rho\rho}^2 + 2 \left(\frac{1}{\rho} u_{\rho\theta} - \frac{1}{\rho^2} u_\theta \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} \right)^2 \right] \rho \, d\rho \, d\theta \quad (3)$$

достигает своего минимума. Уравнением Эйлера для рассматриваемой вариационной задачи является бигармоническое уравнение (1) с граничными условиями (2).

Пусть $r > 0$, $M > 0$ и $r = \bar{r} + \alpha$, где \bar{r} — целое и $0 < \alpha \leq 1$. Будем говорить, как в работе (1), что измеримая функция $f(\theta)$ периода 2π принадлежит к классу $H_{\frac{r}{2}}^{(r)}(M)$, если она: 1) имеет интегрируемый на периоде квадрат; 2) имеет абсолютно непрерывную производную порядка $\bar{r} - 1$; 3) существующая, в силу 2), почти всюду производная порядка \bar{r} имеет интегрируемый на периоде квадрат и удовлетворяет для всех h условию

$$\left(\int_0^{2\pi} |f^{(\bar{r})}(\theta + h) - f^{(\bar{r})}(\theta)|^2 \, d\theta \right)^{1/2} \leq M|h|^\alpha, \quad \text{если } 0 < \alpha < 1;$$

$$\left(\int_0^{2\pi} |f^{(\bar{r})}(\theta + h) - 2f^{(\bar{r})}(\theta) + f^{(\bar{r})}(\theta - h)|^2 \, d\theta \right)^{1/2} \leq M|h|, \quad \text{если } \alpha = 1.$$

Будем говорить, что функция двух переменных $f(\rho, \theta)$, заданная и измеримая на σ , принадлежит к классу $W_2^{(2)}(\sigma)$, если: 1) она

имеет на σ частные производные до второго порядка включительно (понимаемые в обобщенном смысле, см. (1), стр. 256, или (2))

$$\text{и } 2) D[f] \equiv \iint_{\sigma} f^2(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta < \infty,$$

$$D_1[f] \equiv \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right] \rho d\rho d\theta < \infty, \quad D_2[f] < \infty.$$

Теорема 1. Если $f \in W_2^{(2)}(\sigma)$, то почти для всех θ :

$$\text{а) } \lim_{\rho \rightarrow 1} f(\rho, \theta) = \varphi(\theta) \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \varphi^2(\theta) d\theta < \infty; \quad (4)$$

$$\text{б) } \lim_{\rho \rightarrow 1} f_{\rho}(\rho, \theta) = \psi(\theta) \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \psi^2(\theta) d\theta < \infty. \quad (5)$$

Из теоремы 3 (3) С. М. Никольского легко получается:

Теорема 2. Пусть 2π -периодическая функция

$$\psi(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta$$

принадлежит при некотором $\varepsilon \geq 0$ к классу $H_2^{(1/2+\varepsilon)}(M)$. Тогда при $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\alpha_k^2 + \beta_k^2) \leq \frac{CM^2}{\varepsilon}, \quad (6)$$

где $C < \pi/2 \ln 2$ — абсолютная положительная константа.

Оценка (6) достигается в следующем смысле: существуют функция $\psi_{\varepsilon} \in H_2^{(1/2+\varepsilon)}(M_{\psi})$ и не зависящая от ε константа $C_1 > 0$ такие,

что выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} k(\alpha_k^2 + \beta_k^2) > \frac{C_1 M_{\psi}^2}{\varepsilon}$. Если же функция ψ принадлежит к классу худшему, чем $H_2^{(1/2)}$, но ни при каких константах M не принадлежит к классу $H_2^{(1/2)}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \infty. \quad (7)$$

Таким образом, если $\sum_{k=1}^{\infty} k(\alpha_k^2 + \beta_k^2) < \infty$, то $\psi \in H_2^{(1/2+\varepsilon)}$, где $\varepsilon \geq 0$.

Следствие. Пусть $\varphi \in H_2^{(1/2+\varepsilon_1)}(M_{\varphi})$, $\psi \in H_2^{(1/2+\varepsilon_2)}(M_{\psi})$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$,

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta; \quad \psi(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta; \quad (8)$$

тогда при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$

$$S(\varphi, \psi) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^2(2k+1)(a_k^2 + b_k^2) - 2k(k+2)(a_k \alpha_k + b_k \beta_k) + \\ + (2k+1)(\alpha_k^2 + \beta_k^2) \leq 4C \left(\frac{M_{\varphi}}{V_{\varepsilon_1}} + \frac{M_{\psi}}{V_{\varepsilon_2}} \right)^2, \quad (9)$$

где $C < \pi/2 \ln 2$ — абсолютная положительная константа.

Оценка (9) достигается в смысле, указанном в теореме 2. Если хотя бы одна из функций φ и ψ принадлежит к классу худшему, чем соответственно, $H_2^{(\nu/2)}$ и $H_2^{(\nu/2)}$, но ни при каких константах M не принадлежит, соответственно, к одному из последних классов, то

$$S(\varphi, \psi) = \infty. \quad (10)$$

Таким образом, если $S(\varphi, \psi) < \infty$, то $\varphi \in H_2^{(\nu/2+\varepsilon_1)}$, $\psi \in H_2^{(\nu/2+\varepsilon_2)}$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$.

Имеют место теоремы, аналогичные теоремам, доказанным для задачи Дирихле С. М. Никольским в работе (3).

Теорема 3. Пусть $u(\rho, \theta)$ бигармоническая на σ функция, принадлежащая к классу $W_2^{(2)}(\sigma)$. Тогда для почти всех θ :

а) $\lim_{\rho \rightarrow 1} u(\rho, \theta) = \varphi(\theta)$ и $\varphi \in H_2^{(\nu/2+\varepsilon_1)}$ с какой-то константой $M_\varphi > 0$ и $\varepsilon_1 \geq 0$;

б) $\lim_{\rho \rightarrow 1} u_\rho(\rho, \theta) = \psi(\theta)$ и $\psi \in H_2^{(\nu/2+\varepsilon_2)}$ с какой-то константой M_ψ и $\varepsilon_2 \geq 0$.

Доказательство. Первые из утверждений а) и б) и тот факт, что $\varphi, \psi \in L_2$, доказаны в теореме 1.

Пусть ряды (8) суть ряды Фурье для φ и ψ .

Так как $\frac{1}{\pi} D_2[u] = \frac{\alpha_0^2}{2} + S(\varphi, \psi) < \infty$, то

$$S(\varphi, \psi) < \infty. \quad (11)$$

Если теперь допустить, что хотя бы одно из чисел ε_1 и ε_2 отрицательно, то, в силу следствия, имели бы $S(\varphi, \psi) = \infty$, что противоречит (11). Следовательно, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$.

Теорема 4. Пусть

$$\varphi \in H_2^{(\nu/2+\varepsilon_1)}(M_\varphi), \quad \psi \in H_2^{(\nu/2+\varepsilon_2)}(M_\psi) \quad \text{при } \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0. \quad (12)$$

Тогда $\psi(\theta)$ непрерывна; $\varphi(\theta)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(\theta)$.

Если $u(\rho, \theta)$ — бигармоническая на σ функция, непрерывная на $\bar{\sigma}$, удовлетворяющая граничным условиям

$$u|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \quad u_\rho|_{\rho=1} = \psi(\theta), \quad (13)$$

то

$$D_2[u] < \infty.$$

Первое утверждение вытекает из теоремы вложения (1).

Второе утверждение вытекает из следствия теоремы 2.

Рассмотрим при данных $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ классы функций φ и ψ , удовлетворяющих условиям (12). Обозначим через $M_{\varepsilon_1}(\varphi)$, $M_{\varepsilon_2}(\psi)$ соответствующие наименьшие константы, для которых выполняются условия (12). Эти классы образуют пространства типа (B), соответственно, с метрикой $\|\varphi\|^* = M_{\varepsilon_1}(\varphi)$, $\|\psi\|^* = M_{\varepsilon_2}(\psi)$. Обозначим эти пространства через H_{ε_1} и H_{ε_2} .

Из следствия теоремы 2 вытекает:

Теорема 5. Пусть $u(\rho, \theta)$ — бигармоническая на σ функция, удовлетворяющая граничным условиям (13), где $\varphi \in H_{\varepsilon_1}$, $\psi \in H_{\varepsilon_2}$.

Тогда

$$D_2[u] \leq K \left[\frac{M_{\varepsilon_1}(\varphi)}{\sqrt{\varepsilon_1}} + \frac{M_{\varepsilon_2}(\psi)}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right]^2, \quad (14)$$

где K — абсолютная константа.

Оценка (14) достигается в смысле теоремы 2.

Таким образом, решение бигармонической задачи устойчиво в следующем смысле: если φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2 сколь угодно близки, соответственно, в метриках H_{ε_1} и H_{ε_2} , то для бигармонической на σ функции, удовлетворяющей граничным условиям $u|_{\rho=1} = \varphi_1 - \varphi_2, u_\rho|_{\rho=1} = \psi_1 - \psi_2$, интеграл $D_2[u]$ сколь угодно мал.

Примечание. Интересен случай, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. С одной стороны, существуют функции φ и ψ , принадлежащие, соответственно, к классам $H_{\frac{1}{2}}^{(\alpha)}$ и $H_{\frac{1}{2}}^{(\alpha)}$ с конечными константами, такие, что бигармоническая на σ функция, удовлетворяющая почти всюду граничным условиям $u|_{\rho=1} = \varphi, u_\rho|_{\rho=1} = \psi$, имеет конечный интеграл $D_2[u]$. Такими функциями, например, являются функции

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\theta}{k^2 \ln^2 k}, \quad \psi(\theta) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin k\theta}{k \ln^2 k} \quad (\alpha > 0).$$

С другой стороны, в классе $H_{\frac{1}{2}}^{(\alpha)}$ можно даже указать функцию φ , имеющую непрерывную первую производную, а в классе $H_{\frac{1}{2}}^{(\alpha)}$ — функцию ψ , непрерывную, обладающие тем свойством, что для бигармонической на σ функции u , удовлетворяющей почти всюду граничным условиям $u|_{\rho=1} = \varphi, u_\rho|_{\rho=1} = \psi$, интеграл $D_2[u] = \infty$. Такими функциями, например, являются функции

$$\varphi(\theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos N^{2\nu}\theta}{N^{3\nu}}, \quad \psi(\theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin N^{2\nu}\theta}{N^\nu},$$

где $N > 1$ — целое число.

Настоящая работа была выполнена под руководством С. М. Никольского, за что ему приношу глубокую благодарность.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
17 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38, 244 (1951).
² С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. ³ С. М. Никольский, ДАН, 83, № 1, 23 (1952).