Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

С. С. ВОЙТ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УПЛОТНЕНИЙ В ВЯЗКОМ ГАЗЕ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 5 XI 1952)

Пусть имеется безграничный и покоящийся на бесконечности вязкий газ. В начальный момент времени в области G, окружающей начало координат, произведено возмущение, заключающееся в изменении плотности газа и характеризующееся коэффициентом уплотнения $s = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ и скоростью изменения этого коэффициента $\partial s/\partial t$ (эта величина связана с начальными скоростями частиц газа). Требуется найти величину коэффициента уплотнения во всем пространстве в последующие моменты времени.

Математически задача сводится к решению задачи Коши для уравнения 3-го порядка

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \Delta s + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial}{\partial t} \Delta s \tag{1}$$

(где ν — кинематический коэффициент вязкости, а c — скорость звука при отсутствии вязкости) при начальных данных, имеющих вид

$$s(x, y, z, 0) = \omega_1(x, y, z),$$
$$\frac{\partial s(x, y, z, 0)}{\partial t} = \omega_2(x, y, z) \tag{2}$$

для точек, лежащих внутри области возмущения G, и

$$s(x, y, z, 0) = 0, \qquad \frac{\partial s(x, y, z, 0)}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

для точек, лежащих вне области G.

При помощи теоремы И. Г. Петровского [1] показывается корректность постановки задачи Коши для уравнения (1) при начальных данных (2), (3) и строится решение, имеющее весьма сложное выражение в виде шестикратных интегралов.

Однако, если область G есть сфера радиуса ε и начальные данные обладают сферической симметрией, то введением сферической системы координат r, ϑ, ψ решение сводится к виду

$$s(R, \tau) = \frac{1}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\zeta^2} \Big[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \tau\zeta \sqrt{1-\zeta^2} +$$
$$+ \cos \tau\zeta \sqrt{1-\zeta^2} \Big] \sin R\zeta \int_0^{\gamma} \Omega_1(\eta) \sin \zeta\eta \, d\eta \, d\zeta +$$
$$+ \frac{1}{\pi R} \frac{2\nu}{3c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\zeta^2} \frac{\sin \tau\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \sin R\zeta \int_0^{\gamma} \Omega_2(\eta)\, \eta \sin \zeta\eta \, d\eta \, d\zeta, \tag{4}$$

где введены безразмерные величины

$$R = \frac{3c}{2\nu} r, \quad \tau = \frac{3c}{2\nu} ct, \quad \omega_i \left(\frac{2\nu}{3c}\eta\right) = \Omega_i(\eta), \quad \frac{3c}{2\nu}\varepsilon = \gamma. \tag{5}$$

Анализ этого выражения проводится для «подвижного наблюдателя», который с постоянной скоростью U движется от центра возмущения вдоль радиуса, так что его расстояние до центра в безразмерных величинах будет

$$R = \tau v + \alpha, \tag{6}$$

где $v = U/c$ есть безразмерная скорость «наблюдателя», а α характеризует положение «наблюдателя» в начальный момент времени.

Этот способ вносит упрощение в решение и в то же время позволяет уяснить механический характер явления, так как увеличение или уменьшение скорости «наблюдателя» дает возможность выяснить особенности явления в тех точках пространства, которые в теории звука при отсутствии вязкости характеризуются тем, что волна либо еще не дошла до них, либо уже их прошла.

Особый интерес будет представлять случай, когда «наблюдатель» перемещается со скоростью звука при отсутствии вязкости.

Будем выяснять влияние начального уплотнения, и поэтому положим скорости частиц газа в начальный момент времени равными нулю, так что при $t = 0 \quad \partial s/\partial t = 0$.

Произведя замену (6) в (4), приходим к выражению

$$2\pi s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{i\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] f(\gamma, \zeta)\, e^{i\alpha\zeta} e^{-\tau(-iv\zeta + \zeta^2 - i\zeta\sqrt{1-\zeta^2})}\, d\zeta +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \frac{i\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] f(\gamma, \zeta)\, e^{i\alpha\zeta} e^{-\tau(-iv\zeta + \zeta^2 + i\zeta\sqrt{1-\zeta^2})}\, d\zeta, \tag{7}$$

где

$$f(\gamma, \zeta) = \int_0^{\gamma} \Omega_1(\eta) \cos\zeta\eta\, d\eta. \tag{8}$$

Показывается, что первый из интегралов (7) обращается в нуль, а к исследованию второго интеграла применяется асимптотическая оценка при больших τ.

Для этого приходится перейти к интегрированию по комплексной плоскости и воспользоваться методом перевала. Интеграл I_2 записывается в виде

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta)\, e^{-\tau\varphi(\zeta)}\, d\zeta, \tag{9}$$

где обозначается

$$F(\zeta) = \left(1 + \frac{i\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) f(\gamma, \zeta)\, e^{i\alpha\zeta},$$
$$\varphi(\zeta) = -iv\zeta + \zeta^2 + i\zeta\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{10}$$

Для однозначного определения $\sqrt{1-\zeta^2}$ на плоскости комплексного переменного ζ проводится разрез вдоль оси абсцисс от точки $\zeta = -1$ до $\zeta = +1$ и рассматриваются два листа функции $\varphi(\zeta)$.

Интегрирование производится так, что начало и конец пути лежат на первом листе. Тогда оказывается, что путь, вдоль которого мнимая часть функции $\varphi(\zeta)$ сохраняет постоянное значение, имеет вид, изображенный на рис. 1. Путь *1* соответствует случаю $v < 1$, путь *2* — случаю $v = 1$ и, наконец, путь *3* соответствует случаю $v > 1$. Точка перевала лежит на оси ординат в том месте, где путь интегрирования пересекает эту ось. В случае $v < 1$ путь интегрирования заходит на 2-й лист и точка перевала лежит на нем.

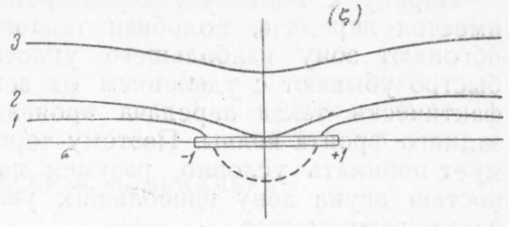

Рис. 1

Асимптотическая оценка, проведенная для интегралов, взятых по указанным путям, приводит к выражению

$$s(\tau) = \frac{1}{R} e^{-\tau\varphi(\zeta_1)} [p_1 \tau^{-1/2} + p_3 \tau^{-3/2} + \dots], \tag{11}$$

где коэффициенты p_1, $p_3, \dots$ определяются значениями функций $F(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$, а также и их производных в точке перевала $\zeta = \zeta_1$ и легко вычисляются.

Показательная функция в этом выражении характеризует затухание коэффициента уплотнения со временем. Если скорость «наблюдателя» равна скорости звука при отсутствии вязкости, то $\varphi(\zeta_1) = 0$, и показательная функция пропадает, т. е. при такой скорости затухание происходит пропорционально некоторой степени τ. При скорости «наблюдателя», не равной c, $\varphi(\zeta_1)$ равно некоторому положительному числу, тем большему, чем больше скорость наблюдателя отличается от скорости звука. Отсюда следует, что чем больше отклонение скорости «наблюдателя» от скорости звука, тем более интенсивно затухают со временем отмечаемые им уплотнения. Окончательные асимптотические выражения коэффициента уплотнения вычислены нами при движении «наблюдателя» со скоростью звука для случая сферических, а также и для случая плоских волн (получение решения и его исследование в последнем случае производится аналогично случаю сферических волн).

Для плоских волн асимптотическое выражение имеет вид

$$s(t) = \sqrt{\frac{3}{8\pi\nu}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\varepsilon \omega_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\sqrt{t}} O\left(\frac{1}{t}\right) \tag{12}$$

и для сферических волн

$$s(t) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{8\pi\nu}} (7 + 4\alpha) \frac{1}{rc} \frac{1}{t\sqrt{t}} \int_0^\varepsilon \omega_1(\xi)\, \xi^2\, d\xi + \frac{1}{t^3\sqrt{t}} O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{13}$$

Из проведенного исследования можно заключить, что в вязком газе начальные уплотнения распространяются, как и в идеальном газе, со скоростью звука (в том приближении, в котором справедливо уравнение (1)). Эти уплотнения постепенно затухают, причем это затухание, в отличие от идеального газа, имеется в случае плоских волн, и оно более интенсивно, чем для идеального газа, в случае сферических волн.

Начальные уплотнения и разрежения постепенно размываются, сглаживая друг друга, так что по прошествии достаточно большого промежутка времени определяющим в мощности зоны наибольшего возмущения является суммарный эффект начального уплотнения, характеризуемый интегралом по области G от начального уплотнения.

Наряду с волновым характером передачи начальных уплотнений имеется передача, подобная теплопроводности, так что возмущения обгоняют зону наибольшего уплотнения. Правда, эти возмущения быстро убывают с удалением от зоны максимального уплотнения, и фактически такая передача проявляется в размывании переднего и заднего фронта волны. Поэтому термин «волна» для вязкого газа следует понимать условно, разумея под ним передвигающуюся со скоростью звука зону наибольших уплотнений, границы которой постепенно размываются.

В заключение приношу глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР Л. Н. Сретенскому, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
3 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, в. 7 (1938).