Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ТУГАНОВ

О КОНГРУЕНЦИИ ИНДИКАТРИС ДЮПЕНА ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 XI 1952)

Совокупность индикатрис Дюпена, построенных для всех точек поверхности, образует конгруенцию. Целью работы является изучение конгруенции индикатрис Дюпена.

I. Линии центров на поверхности

Рассмотрим линию на поверхности. Вообще, индикатрисы Дюпена, построенные в бесконечно близких точках этой линии, не пересекаются. Линию, обладающую тем свойством, что индикатрисы Дюпена, построенные в точках ее, допускают огибающую, назовем линией центров поверхности, самую же огибающую — фокальной линией. Характеристическую точку (точку касания индикатрисы с огибающей) назовем фокальной точкой. Выведем уравнение линии центров. Отнесем поверхность к линиям кривизны, при этом будем пользоваться методом внешних форм Картана ([1]). Из определения линии центров следует, что фокальная точка P находится на направлении, сопряженном в смысле Дюпена с направлением линии центров в соответствующей ее точке M.

Для определения фокальной точки $\mathbf{P}$ имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \pm \frac{\mathbf{e}_1 - \frac{R_2}{R_1}\operatorname{ctg}\mu\cdot\mathbf{e}_2}{\sqrt{\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1^2}\operatorname{ctg}^2\mu}}, \tag{1}$$

где μ — угол наклона линии центров к линии кривизны $\omega^2 = 0$. Касательная к фокальной линии параллельна касательной к линии центров в соответственной точке. Из этого условия получим уравнение линии центров в виде

$$(\omega^1)^2\, dR_2 + 2(R_2 - R_1)\,\omega^1\omega^2\omega_1^2 + (\omega^2)^2\, dR_1 = 0. \tag{2}$$

По виду уравнения заключаем, что через каждую точку поверхности проходят три линии центров. На каждой индикатрисе Дюпена имеется 6 фокусов и, следовательно, существует 6 фокальных полостей; к каждой линии центров присоединены 2 фокальные линии. Если положить $dR_1 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2$, $dR_2 = \gamma\omega^1 + \delta\omega^2$, то уравнение (2) примет вид

$$\beta\left(\frac{\omega^2}{\omega^1}\right)^3 + \left(\alpha - 2\frac{R_1}{R_2}\gamma\right)\left(\frac{\omega^2}{\omega^1}\right)^2 + \left(\delta - 2\frac{R_2}{R_1}\beta\right)\frac{\omega^2}{\omega^1} + \gamma = 0. \tag{3}$$

Для направлений трех линий центров в точке получим

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega^1}\right)_1\left(\frac{\omega^2}{\omega^1}\right)_2\left(\frac{\omega^2}{\omega^1}\right)_3 = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\frac{(\rho_g)_{\omega^2=0}}{(\rho_g)_{\omega^1=0}} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\frac{t^*}{t},$$

где t и t^* — расстояния между фокусами луча конгруенции касательных, соответственно, к линиям кривизны $\omega^2 = 0$ и $\omega^1 = 0$.

Естественное уравнение линии центров. Линия центров на поверхности характеризуется следующим естественным уравнением:

$$\frac{1}{T_g}\frac{1}{\rho_g}+\frac{a}{2}\frac{d}{ds}\ln\frac{K}{a}=0 \quad \text{или} \quad 2\operatorname{tg}\Theta\frac{ds}{T}+d\ln\frac{\rho K}{\cos^3\Theta}=0,$$

где a, $1/T_g$, $1/\rho_g$ — соответственно, нормальная кривизна, геодезическое кручение и геодезическая кривизна линии центров; Θ — угол главной нормали линии центров с нормалью к поверхности; K — полная кривизна поверхности.

Линии центров на некоторых известных поверхностях.

а) На поверхностях 2-го порядка линии центров суть линии $K=\text{const}$ и асимптотические линии. В частности, на сфере любая линия есть линия центров.

б) На развертывающихся поверхностях любая линия есть линия центров.

в) На поверхностях вращения одно семейство линии центров совпадает с параллелями, два других определяются уравнениями $\frac{\omega^2}{\omega^1}=\pm\frac{1}{\sqrt{2R_1/R_2-dR_1/dR_2}}$, где $\omega^1=0$ есть уравнение параллелей, $\omega^2=0$ — уравнение меридианов; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности. Линии этих двух семейств расположены симметрично относительно меридианов.

г) На минимальных поверхностях два семейства линий центров суть линии сдвига, третье определяется уравнением $\frac{\omega^2}{\omega^1}=\frac{[d\ln R_1;\,\omega^2]}{[\omega^1;\,d\ln R_1]}$. Линии третьего семейства расположены симметрично с линиями $K=\text{const}$ относительно линий кривизны.

д) На поверхностях $K=\text{const}$ линия центров определяется уравнением $3\Theta_s'+(\ln\rho)_s'\operatorname{ctg}\Theta+\frac{2}{T}=0$, где ρ, T — радиусы кривизны и кручения линии центров; Θ — угол главной нормали линии центров с нормалью к поверхности. Так как из этого уравнения определяется функция $\Theta=\Theta(s)$, если заданы $\rho=\rho(s)$, $T=T(s)$, то по линии центров, лежащей на поверхности $K=\text{const}$, определяется поверхностная полоса этой поверхности. Естественное уравнение линии центров на поверхности $K=\text{const}$ можно представить в виде $\frac{1}{T_g}\frac{1}{\rho_g}=\frac{1}{2}\frac{da}{ds}$.

II. Классы поверхностей со специальными свойствами линий центров

1) Если одно семейство линий центров совпадает с линиями кривизны, то получаются поверхности Монжа.

2) Если одно семейство линий центров суть линии асимптотические, то поверхность — линейчатая.

3) Если одно семейство линии центров суть линии постоянной (одной и той же) нормальной кривизны, то это возможно лишь на поверхностях класса, зависящего от 3 произвольных функций одного аргумента. Линии центров определяются естественным уравнением

$$\frac{1}{T_g}\frac{1}{\rho_g}+a\frac{d}{ds}\ln\sqrt{-K}=0,\ a=\text{const}.$$

4) Поверхности, у которых одно семейство линий центров суть линии постоянного геодезического кручения. Этот класс поверхностей определяется с произволом в 3 функции одного аргумента. В точках одной и той же линии центров нормальная кривизна ортогональных траекторий к линиям центров имеет постоянное значение.

5) Поверхности, на которых линии центров одного семейства — геодезические. Эти поверхности существуют с произволом в 4 функции одного аргумента. Линии центров рассматриваемого семейства обладают тем свойством, что кривизна (обыкновенная) их пропорциональна полной кривизне поверхности. Ниже мы увидим еще одно важное свойство этих линий.

6) Поверхности, на которых одно семейство линий центров — плоские линии. Поверхности этого класса существуют с произволом в 5 функций одного аргумента. Плоские линии центров характеризуются свойством $\rho K : \sin^3 \tilde{\Theta} = \mathrm{const}$, где $\tilde{\Theta}$ — угол нормали к поверхности с постоянным направлением (бинормалью линии центров).

7) Поверхности, на которых вдоль одной и той же линии центров сопряженные траектории имеют одну и ту же нормальную кривизну. Класс поверхностей существует с произволом в 4 функции одного аргумента. Сюда входят, как частный случай, поверхности Монжа. В общем случае на указанных поверхностях линии центров суть линии тени.

8) Поверхности, на которых линии центров ортогональны асимптотическим. Указанные поверхности существуют с произволом в 3 функции одного аргумента. Линии центров на них характеризуются свойством

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{2}\sqrt{-K}\,\frac{d\,(R_1 + R_2)}{ds}.$$

9) Можно показать, что к произвольно взятой поверхности всегда можно присоединить с произволом в 5 функций одного аргумента другую поверхность так, что в возникающем точечном соответствии между ними сохраняются линии центров.

III. Фокальные линии и фокальные полости

Каждой линии центров соответствуют 2 фокальные линии, огибающие индикатрисы Дюпена с центрами на линии центров. Геометрическое место фокальных линий образует, соответственно, 2 фокальных полости. Фокальные линии находятся с линией центров и между собой в соответствии Комбескюра. Трехгранники Френе фокальных линий и линии центров параллельны между собой, радиусы кривизны и кручения их пропорциональны.

Характер точечного соответствия между фокальными полостями и исходной поверхностью. Если отнести поверхность к линиям кривизны, то фокальные точки определятся из (1). Тогда для соответственных точек фокальных полостей и исходной поверхности получим

$$\mathbf{P} + \mathbf{P}^* = 2\mathbf{M}. \tag{4}$$

Соответственные элементы фокальных полостей и исходной поверхности связаны зависимостью $d\,\mathbf{P} + d\,\mathbf{P}^* = 2d\,\mathbf{M}$.

Из выражения для элемента фокальной полости

$$d\,\mathbf{P} = \{\cdots\}\,\mathbf{e}_1 + \{\cdots\}\,\mathbf{e}_2 \pm \frac{\omega^2 \operatorname{ctg}\mu - \omega^1}{R_1\sqrt{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{R_2}{R_1^2}\operatorname{ctg}^2\mu}}\,\mathbf{e}_3 \tag{5}$$

заключаем:

1) Проекции соответственных элементов фокальных полостей на направление нормали к исходной поверхности равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

2) Сумма масштабов изображения соответствующих фокальных линий на линию центров равна 2. Сама величина масштаба $\varkappa = 1 \mp MP / t$.

3) Проекция элемента фокальной полости на направление нормали к другой фокальной полости в соответствующей точке равна удвоенной проекции на то же направление элемента исходной поверхности.

4) Из (5) выводим: отношение проекции элемента $d\mathbf{P}$ фокальной полости на направление нормали к исходной поверхности к проекции соответствующего элемента исходной поверхности на направление ортогональной траектории к линии центров есть инвариант точки. $\frac{(d\,\mathbf{P};\, \mathbf{e}_3)}{ds \cdot \sin(\Theta - \mu)} = \frac{1}{\sqrt{R_1 \sin^2 \mu + R_2 \cos^2 \mu}} = -\frac{K}{\sqrt{-aK}}$, μ — угол наклона линии центров к линии кривизны; a — нормальная кривизна линии центров.

Относительно точечного соответствия между фокальной полостью и исходной поверхностью можно поставить ряд задач. В частности, если потребовать, чтобы фокальные линии были асимптотическими линиями фокальной полости, то это имеет место в следующих двух случаях:

1) Либо линии центров исходной поверхности суть геодезические линии. Произвол класса поверхностей — 4 функции одного аргумента.

2) Либо искомые поверхности удовлетворяют условию

$$\left[\omega^2;\ \omega^1 + d\,\frac{b}{\sqrt{-aK}} + \frac{a\omega_1^2}{\sqrt{-aK}}\right] = 0.$$

Класс поверхностей зависит от 4 функций одного аргумента.

IV. Определение исходной поверхности по данной фокальной полости

Если задать произвольно поверхность и рассматривать ее как фокальную полость, то по ней определится исходная поверхность с произволом в 3 функции одного аргумента. Этот произвол падает на выбор семейства фокальных линий на заданной поверхности

V. Связь с теорией конгруенций

Изложенное выше имеет непосредственную связь с теорией конгруенций. Действительно, в предыдущей теории имеет важное значение семейство линий, сопряженных с линиями центров.

Если рассмотреть конгруенцию касательных к сопряженным траекториям линий центров, то она определится характеристическим условием $\left[d\ln C - \frac{B}{\rho}\tilde{\omega}^1;\ \tilde{\omega}^2\right] = 0$, где $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2$ — формы, определяющие развертывающиеся поверхности конгруенции; ρ — полуфокусное расстояние луча; B, C — инварианты конгруенции [2]; уравнение $\tilde{\omega}^2 = 0$ определяет линии центров на соответствующей фокальной поверхности конгруенции.

Если потребовать, чтобы и на другой фокальной поверхности конгруенции линии одного семейства фокальной сети также были линиями центров, то возникающая конгруенция определяется уравнениями $\left[d\ln C - \frac{B}{\rho}\tilde{\omega}^1;\ \tilde{\omega}^2\right] = 0$, $\left[d\ln C' + \frac{B'}{\rho}\tilde{\omega}^2;\ \tilde{\omega}^1\right] = 0$; ее произвол — 6 функций одного аргумента.

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
31 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М.— Л., 1948. [2] С. П. Фиников, Теория конгруенций, М.— Л., 1951.