

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

**СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ
ПЕРЕМЕННЫХ НА ЗАМКНУТЫХ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 X 1952)

Будем пользоваться обозначениями, введенными в предыдущей нашей заметке (1). Введем еще следующее сокращение: если $r_1 = \dots = r_n = r$ и $M_1 = \dots = M_n = M$, то положим $H_p^{(r_1 \dots r_n)}(G; M_1, \dots, M_n) = H_{pn}^{(r)}(G; M)$; кроме того, пусть $H_{pn}^{(r)}(R_n, M) = H_{pn}^{(r)}(M)$.

В этой статье мы будем функции $f(x_1, \dots, x_n)$, принадлежащие к классам $H_{pn}^{(r)}(M)$, рассматривать на различных m -мерных многообразиях S ($1 \leq m < n$). m -мерное многообразие S определяется следующим образом. Это есть замкнутое ограниченное множество, принадлежащее к R_n , такое, что каждая его точка P_0 может быть окружена шаром с центром в ней, отсекающим от S кусок σ , определяемый при соответствующей нумерации осей координат уравнениями

$$x_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_m) \quad (k = m + 1, \dots, n), \quad (1)$$

где точка (x_1, \dots, x_m) пробегает некоторую m -мерную область G . При этом функции φ_k на G имеют непрерывные частные производные порядков по меньшей мере $\bar{r} + 1$ ($r = \bar{r} + \alpha$, \bar{r} — целое, $0 < \alpha \leq 1$). Кроме этого, предполагается, что возможно с каждой точкой $P \in \sigma$ связать $n - m$ единичных векторов

$$\bar{N}_{m+1}, \dots, \bar{N}_n,$$

ортогональных между собой и таких, что каждый из них ортогонален к линейному касательному в точке P к S многообразию. При этом проекции этих векторов

$$\bar{N}_j = (\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)}) \quad (j = m + 1, \dots, n) \quad (2)$$

суть функции от x_1, \dots, x_m , имеющие непрерывные частные производные порядков до $\bar{r} + 1$ включительно.

Если какая-либо функция $f \in H_{pn}^{(r)}$ непрерывна, то она индуцирует на многообразии S некоторую функцию $f|_p$. На каждом из кусков σ эта функция может быть записана при помощи функции

$$F(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n) \quad (3)$$

от переменных x_1, \dots, x_m , определенных на соответствующей m -мерной области G . Конечно, мы эту функцию чисто условно выражаем через

первые m координат. На самом деле на разных кусках σ эти координаты, вообще говоря, меняются. В общем случае f не обязательно непрерывна, она определена с точностью до n -мерной меры нуль, и потому функция $f|_{\sigma}$ остается неопределенной. Мы сейчас определим, что мы будем понимать под $f|_{\sigma} = F$. Зададим произвольные числа h_{m+1}, \dots, h_n и определим на G функцию

$$f\left(x_1 + \sum_{m+1}^n \alpha_1^{(j)} h_j, \dots, x_m + \sum_{m+1}^n \alpha_m^{(j)} h_j, \varphi_{m+1} + \sum_{m+1}^n \alpha_{m+1}^{(j)} h_j, \dots, \varphi_n + \sum_{m+1}^n \alpha_n^{(j)} h_j\right) = F(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) = F_{(h)}. \quad (4)$$

Функция F , определенная на G , это такая функция, для которой имеет место

$$\int_{\bar{G}_1} \dots \int |F_{(h)} - F|^p dx_1 \dots dx_m \xrightarrow{\sum_{m+1}^n |h_k| \rightarrow 0} 0 \quad (5)$$

для любой области G_1 такой, что ее замыкание $\bar{G}_1 \subset G$.

Можно показать, что равенство (5) всегда имеет место, если $\rho = r - \frac{n-m}{p} > 0$, что определенная таким образом функция не зависит от выбора нормальных векторов (2) и что в случае, если кусок $\sigma \subset S$ будет задан явно через другие, отличные от x_1, \dots, x_m координаты, то функция F преобразуется к новым координатам так, как это делается в случае функции $f(x_1, \dots, x_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n)$, понимаемой в обычном смысле этого термина.

Определим далее нормальную (вообще говоря, смешанную) производную от f на $\sigma \subset S$ следующим образом:

$$\left. \frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \dots \partial N_n^{\lambda_n}} \right|_{\sigma} = \left. \frac{\partial^\lambda F_{(h)}}{\partial h_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \dots \partial h_n^{\lambda_n}} \right|_0 \quad \left(\lambda = \sum_{m+1}^n \lambda_j \right). \quad (6)$$

Таким образом, правая часть (6) есть функция, к которой в среднем на всяком $G_1 \subset G$ стремится стоящая до значка $|_0$ в правой части (6) частная производная, когда $\sum_{m+1}^n |h_k| \rightarrow 0$.

Теорема 1. Пусть $f \in H_{pn}^{(r)}(M)$ и задана система (λ) неотрицательных целых чисел $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$, для которых

$$\lambda = \sum_{m+1}^n \lambda_k < r, \quad (7)$$

$$\rho^{(\lambda)} = r - \lambda - \frac{n-m}{p} > 0. \quad (8)$$

Тогда:

1) Существует функция

$$\left. \frac{\partial f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \dots \partial N_n^{\lambda_n}} \right|_{\sigma} = \left. \frac{\partial F_{(h)}}{\partial h_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \dots \partial h_n^{\lambda_n}} \right|_0,$$

принадлежащая к классу $H_p^{(\rho(\lambda))}(G_1, M_{G_1})$, где

$$M_{G_1} < c_{G_1} (\|f\|_p^{(n)} + M), \quad (9)$$

$$\left\| \frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \dots \partial N_n^{\lambda_n}} \right\|_0 \Big|_{L_p(G)} < c_{G_1} (\|f\|_p^{(n)} + M).$$

(при $\lambda = 0$ речь идет о f). Здесь G_1 есть произвольная область, замыкание которой принадлежит к G .

2) Производные от f порядка λ по направлениям других нормальных векторов $\bar{N}_{m+1}, \dots, \bar{N}_n$, подчиняющихся вышеуказанным условиям гладкости, вполне определяются при помощи производных порядка λ по направлениям $\bar{N}_{m+1}, \dots, \bar{N}_n$. При этом формулы преобразования в точности совпадают с классическими формулами, выводимыми в случае, когда соответствующие частные производные от f непрерывны.

Но имеет место также и обратная теорема.

Теорема 2. Пусть в пространстве R_n задана конечная система неперекрывающихся попарно многообразий S_1, \dots, S_u , соответственно имеющих измерения m_1, \dots, m_u ($rp - n + m_k > 0$). Каждое многообразие покрыто конечным числом лежащих на нем (перекрывающихся) кусков σ . Куски эти явно выражаются через те или иные m_k координат при помощи равенств вида (1) и с точками их связаны определенные системы нормальных к σ векторов $\bar{N}_{m_k+1}, \dots, \bar{N}_n$.

Задано, далее, положительное число r и всевозможные (допустимые), связанные с каждым многообразием S_k системы $(\lambda)_k$ неотрицательных целых чисел $\lambda_{m_k+1}, \dots, \lambda_n$ для которых

$$\lambda = \sum_{m_k+1}^n \lambda_j < r \quad \text{и} \quad \rho^{(\lambda)_k} = r - \lambda - \frac{n - m_k}{p} > 0. \quad (10)$$

С каждым куском σ , лежащим на многообразии S_k , и с каждой допустимой системой $(\lambda)_k$ пусть связана функция $F_{(\lambda)_k \sigma} = F_{(\lambda)_k \sigma}$, заданная на σ . Если кусок σ явно выражается при помощи равенств типа (1) через координаты x_1, \dots, x_{m_k} (или другие m_k координат), то функция $F_{(\lambda)_k \sigma}$, выраженная через эти координаты, пусть принадлежит к классу $H_p^{(\rho(\lambda)_k)}(G_\sigma, M)$, где G_σ есть проекция куска σ на линейное подпространство переменных x_1, \dots, x_{m_k} (или других переменных).

На общих перекрывающихся частях кусков σ одного и того же многообразия S_k функции $F_{(\lambda)_k \sigma}$ предполагаются согласованными друг с другом в том смысле, что они подчиняются соответствующим классическим формулам преобразования от одной системы векторов $\bar{N}_{m_k+1}, \dots, \bar{N}_n$ к другой и от одних m_k переменных к другим, необходимым для того, чтобы были возможны равенства

$$\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m_k+1}^{\lambda_{m_k+1}} \dots \partial N_n^{\lambda_n}} \Big|_\sigma = F_{(\lambda)_k \sigma} \quad (11)$$

для всех допустимых систем $(\lambda)_k$ и всех кусков, покрывающих одно и то же многообразие при одной и той же функции f .

В таком случае в пространстве R_n можно построить функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, подчиняющуюся следующим условиям:

$$f \in H_{p_n}^{(r)}(M^*),$$

$$M^* < c \left(\sum_{\sigma} \sum_{(\lambda)_{\sigma}} \|F_{(\lambda)_{\sigma}\sigma}\|_{L_p(G_{\sigma})} + M \right), \quad (12)$$

$$\|f\|_p^{(m)} < c \left(\sum_{\sigma} \sum_{(\lambda)_{\sigma}} \|F_{(\lambda)_{\sigma}\sigma}\|_{L_p(G_{\sigma})} + M \right).$$

Здесь вторая сумма распространена на всевозможные допустимые системы $\lambda_{m_k+1}, \dots, \lambda_n$, соответствующие куску σ в зависимости от числа его измерений, а первая сумма — на всевозможные, покрывающие по теореме наши многообразия, куски σ . Константа c не зависит от чисел, стоящих в скобках правых частей (12).

На соответствующих кусках σ для определенных на них нормалей (2) справедливы равенства (11).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
29 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. М. Никольский, ДАН, 88, № 1 (1953).