Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

БИНАРНЫЕ АНАМОРФОЗЫ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 XI 1952)

Под бинарной анаморфозой функции $F(t, \tau) \equiv F(t_1, \tau_1; \ldots; t_n, \tau_n)$ будем понимать представление ее в виде детерминанта Массо

$$F(t, \tau) \equiv |f_{1i}(t_i, \tau_i); \ldots; f_{in}(t_i, \tau_i)|. \tag{1}$$

К отысканию для данной функции $F(t, \tau)$ представлений (1) приводится вопрос не только о номографировании уравнений со многими переменными, но и вопрос об отыскании неявных (обобщенных) анаморфоз уравнений $F(t_1, t_2, t_3) = 0$ и номограмм с повторением переменных.

В данной работе обобщаются на случай бинарных анаморфоз некоторые результаты, полученные автором ранее [1, 2] для простых анаморфоз функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Пусть $F(t_1, \tau_1)$ — семейство всех функций

$$F(t_1, \tau_1; \alpha, \beta) \equiv F(t_1, \tau_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots; \alpha_n, \beta_n), \tag{2}$$

зависящее от $2(n-1)$ параметров α_i, β_i — значений переменных t_i, τ_i в области G задания функции $F(t, \tau)$.

Назовем $F(t, \tau)$ N-рациональной по (t_1, τ_1), если существует конечное число функций

$$\varphi_1(t_1, \tau_1), \ \varphi_2(t_1, \tau_1), \ldots, \varphi_r(t_1, \tau_1) \tag{3}$$

таких, что каждая функция (2) семейства $F(t_1, \tau_1)$ является их линейной комбинацией.

Понятие базы, размерности по t_1 функции $F(t_1, \ldots, t_n)$, данные ранее [1], понятным образом обобщаются на случай базы, размерности по (t_1, τ_1) функции $F(t, \tau)$.

В частности, система образующих (3) будет тогда и только тогда базой по (t_1, τ_1) функции $F(t, \tau)$, если линейно независимы как функции системы (3), так и коэффициенты F_j $(j = 1, \ldots, r)$ линейного разложения

$$F(t, \tau) = \sum_{j=1}^{r} F_j \varphi_j(t_1, \tau_1). \tag{4}$$

Невырожденную функцию [1] $F(t, \tau)$, допускающую представление (1), назовем бинарной M-функцией (относительно пар (t_i, τ_i) переменных).

Для бинарной M-функции (с $n = 3, 4$ парам переменных) адьюнкты F_{ij} определителя (1), соответствующие элементам f_{ij} $(j = 1, \ldots, n)$, линейно независимы. Отсюда можно получить следующие теоремы об единственности анаморфоз.

Теорема 1. *Если размерность бинарной М-функции $F(t, \tau) \equiv F(t_1, \tau_1;\ t_2, \tau_2;\ t_3, \tau_3)$ равна 3 в отношении, по меньшей мере, одной из пар переменных (t_i, τ_i), то все анаморфозы* (1) *этой функции при заданном разбиении переменных на пары проективны.*

Теорема 2. *Если размерность бинарной М-функции $F(t, \tau) \equiv F(t_1, \tau_1; \ldots ; t_4, \tau_4)$ равна 4 в отношении, по меньшей мере, одной из пар переменных (t_i, τ_i) и не менее 3 в отношении каждой из других пар переменных, то все анаморфозы* (1) *этой функции при заданном разбиении переменных на пары проективны.*

Для исследования вопроса об условиях бинарной анаморфозы, о методах ее отыскания введем понятие A-матрицы функции $F(t, \tau)$, как это было ранее сделано при изучении простой анаморфозы $F(t_1, \ldots, t_n)$ ([2]).

Каждому линейному по (t_1, τ_1), (t_2, τ_2) разложению

$$F(t, \tau) = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \varphi_{1i}(t_1, \tau_1)\, \varphi_{2j}(t_2, \tau_2)\, v_{ij} \tag{5}$$

приведем в соответствие A-матрицу $T^{(12)} = \| v_{ij} \|$:

$$\begin{array}{c|ccc}
T^{(12)} & \varphi_{11}(t_1, \tau_1) & \ldots & \varphi_{1r_1}(t_1, \tau_1) \\
\hline
\varphi_{21}(t_2, \tau_2) & v_{11} & \ldots & v_{r_1 1} \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\varphi_{2r_2}(t_2, \tau_2) & v_{1r_1} & \ldots & v_{r_1 r_2}
\end{array} \tag{6}$$

Если разложение (5) является базисным по (t_1, τ_1), (t_2, τ_2), то A-матрица $T^{(12)}$ вполне определена заданием ее верхнего и левого входов.

Две базисные A-матрицы $T^{(12)}$ и $\overline{T}^{(12)}$ данной функции всегда эквивалентны, и поэтому существуют такие неособенные с постоянными элементами матрицы B и C, что

$$\overline{T}^{(12)} = BT^{(12)}C. \tag{7}$$

Из эквивалентности базисных A-матриц можно получить следующие условия бинарной анаморфозы.

Функция $F(t, \tau) \equiv F(t_1, \tau_1;\ t_2, \tau_2;\ t_3, \tau_3)$ типа $[3; r_2; r_3]$ $(1 < r_i \leqslant 3)$ тогда и только тогда допускает бинарную анаморфозу (1), *если для какой-либо (а следовательно, и для каждой) базисной A-матрицы $T^{(12)}$ найдется такая неособенная матрица C с постоянными элементами, что произведение $\overline{T}^{(12)} = T^{(12)}C$ является некоторой кососимметрической (при $r_2 = 3$) или усеченной кососимметрической (при $r_2 = 2$) матрицей.*

В случае вещественной функции $F(t, \tau)$ как разложение (5), так и матрица C могут быть взяты вещественными, и отсюда следует существование вещественных бинарных анаморфоз.

Вместо отыскания элементов матрицы C практически следует приводить A-матрицу $T^{(12)}$ к кососимметрическому виду при помощи элементарных преобразований A-матрицы; из A-матрицы $T^{(12)}$ непосредственно найдется искомая анаморфоза ([2]).

Для случая $n > 3$ пар переменных справедлива теорема:

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы функция $F(t, \tau)$ типа $[n; r_2; \ldots; r_n]$ относительно пар переменных (t_i, τ_i) допускала бинарную анаморфозу* (1), *необходимо, чтобы для каждой из ее базисных A-матриц $T^{(1k)}$ $(k = 2, \ldots, n)$ существовала такая неособенная матрица C_k с постоянными элементами, что произведение*

$$T^{(1k)}C_k = \overline{T}^{(1k)} \quad (k = 2, \ldots, n), \tag{8}$$

где $\overline{T}^{(1k)}$ — некоторая кососимметрическая или (при $r_k < n$) усеченная кососимметрическая матрица. Для функции размерности и по каждой из пар переменных (t_i, τ_i) указанное условие является также и достаточным.

Для бинарных (вещественных) уравнений третьего N-порядка

$$F(t, \tau) = \sum_{i, j, k=1}^{2} a_{ijk} f_{1i} f_{2j} f_{3k} = 0, \tag{9}$$

где $f_{lm} = f_{lm}(t_l, \tau_l)$, классификацию и прямые (вещественные) анаморфозы легко получить преобразованием A-матриц.

Пусть $T^{(12)}$ — A-матрица, отвечающая разложению (9)

$$\begin{array}{c|cc} T^{(12)} & f_{11} & f_{12} \\ \hline f_{21} & \Sigma a_{11k} f_{3k} & \Sigma a_{21k} f_{3k} \\ f_{22} & \Sigma a_{12k} f_{3k} & \Sigma a_{22k} f_{3k} \end{array} \tag{10}$$

Определитель K этой A-матрицы является бинарной квадратичной формой f_{3k}.

Можно показать, что величина ее дискриминанта Δ не изменяется от перестановки индексов коэффициентов a_{ijk} ([3]), и поэтому дискриминанты форм K_1, K_2, отвечающих A-матрицам $T^{(23)}$, $T^{(31)}$, будут также Δ; Δ назовем дискриминантом уравнения (9).

Если за образующие базисного хотя бы по (t_1, τ_1) разложения взять новые функции $\overline{f}_{1i}$, где

$$f_{1i} = b_{i1}\overline{f}_{11} + b_{i2}\overline{f}_{12} \quad (i = 1, 2), \tag{11}$$

то для нового базисного разложения $\overline{T}^{(12)}$, $\overline{K}_3$, $\overline{\Delta}$ будут

$$\overline{T}^{(12)} = T^{(12)} \| b_{ik} \|; \quad \overline{K}_3 = K_3 | b_{ik} |; \quad \overline{\Delta} = | b_{ik} |^2 \Delta,$$

и поэтому:

Знак дискриминанта Δ данного уравнения есть инвариант уравнения в отношении всевозможных (вещественных) базисных его разложений.

Легко показать, что уравнение (9) тогда и только тогда допускает прямую анаморфозу, если среди его базисных A-матриц имеется A-матрица, по крайней мере, с одним элементом, равным нулю.

При $\Delta < 0$ такой A-матрицы не может быть, так как бинарная форма K_3 (при $\Delta < 0$) не распадается на произведение двух вещественных множителей.

При $\Delta \geqslant 0$, как нетрудно показать, можно найти такие вещественные α и β, что матрица $\overline{T}^{(12)}$

$$\overline{T}^{(12)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} T^{(12)} \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

будет иметь нулевой элемент. Поэтому:

Уравнение (9) *тогда и только тогда допускает прямую анаморфозу, если его дискриминант $\Delta \geqslant 0$.*

Фактически эта анаморфоза может быть найдена при помощи элементарных преобразований A-матрицы ([2]).

Надлежащим выбором элементов базисных разложений каждое из уравнений (9) *может быть приведено к одной из следующих канонических форм*:

а) *при* $\Delta > 0$ *к первой форме* $f_1 f_2 f_3 = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$;

б) *при* $\Delta = 0$ *ко второй форме* $f_1 \varphi_2 \varphi_3 + f_2 \varphi_3 \varphi_1 + f_3 \varphi_1 \varphi_2 = 0$;

в) *при* $\Delta < 0$ *к третьей форме* $f_1 f_2 f_3 = f_1 \varphi_2 \varphi_3 + f_2 \varphi_3 \varphi_1 + f_3 \varphi_1 \varphi_2$.

(При $\varphi_l = 1$ и $\tau_l = c$ получаются известные формы Соро ([3]).)

Для бинарного уравнения четвертого N-порядка

$$F(t, \tau) \equiv \sum_{l, j=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} a_{ljk} f_{1l} f_{2j} f_{3k} = 0 \tag{13}$$

определитель K A-матрицы $T^{(12)}$ — тернарная квадратичная форма от f_{3k}. При $K = 0$ уравнение (9) вырождается.

Пусть (при $K \neq 0$) дискриминант K равен D. Если от разложения (13) перейти к новому — с элементами $\overline{f}_{ik}$, где

$$f_{il} = \sum_k b_{ik}^{(l)} \overline{f}_{ik} \quad (i, l, k = 1, 2, 3), \tag{14}$$

то для нового базисного разложения

$$\overline{D} = (\Delta_1 \Delta_2)^3 \Delta_3^2 D, \tag{15}$$

где Δ_l — определители преобразования (14). Поэтому возможны два типа уравнений (13): с $D \neq 0$ и с $D = 0$.

Уравнение (13) *тогда и только тогда допускает прямую анаморфозу, если его дискриминант* $D = 0$, *так как только в этом случае оно может иметь базисную* A-*матрицу* $T^{(12)}$ *с нулем.*

Эту анаморфозу легко найти, получив преобразованием A-матрицы этот нулевой элемент.

При надлежащем выборе элементов базисных разложений уравнение (13) *может быть приведено к одной из следующих форм*:

а) *при* $D = 0$ *к форме Коши* $f_1 \varphi_2 f_3 + \varphi_1 f_2 g_3 + \varphi_1 \varphi_2 h_3 = 0$;

б) *при* $D \neq 0$ *к форме Кларка* $f_1 f_2 f_3 + (f_1 \varphi_2 + \varphi_1 f_2) g_3 + \varphi_1 \varphi_2 h_3 = 0$.

(При $\varphi_l = 1$ и $\tau_l = c$ получаем известные формы уравнений от трех переменных ([3]).)

Эти формы удобно получать также элементарными преобразованиями A-матрицы $T^{(12)}$, соответственно, к виду

$$\begin{array}{c|cc} \overline{T}^{(12)} & \varphi_1 & f_1 \\ \hline \varphi_2 & h_3 & f_3 \\ f_2 & g_3 & 0 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c|cc} \overline{T}^{(12)} & \varphi_1 & f_1 \\ \hline f_2 & g_3 & f_3 \\ \varphi_2 & h_3 & g_3 \end{array} \tag{16}$$

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова
г. Свердловск

Поступило
28 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. В. Николаев, ДАН, 67, № 3 (1949). [2] П. В. Николаев, ДАН, 68, № 2 (1949). [3] Н. А. Глаголев, Теоретические основы номографии, 1936.