

А. Г. НАФТАЛЕВИЧ

**ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ
В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 XI 1952)

Рассмотрим рост мероморфной в единичном круге функции, лорановские разложения которой в окрестностях заданных точек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots, |\lambda_n| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 1$, начинаются с заданных групп членов.

Теорема 1. Пусть q — наибольшее целое число, для которого расходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\lambda_i|)^q, |\lambda_i| < 1, \lim_{i \rightarrow \infty} |\lambda_i| = 1$. Тогда каноническое произведение

$$\Pi(z, \lambda) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_i(\lambda_i - z)}{1 - \bar{\lambda}_i z} \exp \left\{ \frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{q} \left(\frac{1 - |\lambda_i|^2}{1 - \bar{\lambda}_i z} \right)^q \right\}$$

есть регулярная в единичном круге функция с нулями в точках λ_i , и ее порядок и тип равны, соответственно, порядку и типу функции $N(r) = \int_0^r \frac{n(t) dt}{t}$, где $n(t)$ — число точек λ_i в круге радиуса $t < 1$.

Если порядок $N(r)$ не целое число, то $\Pi(z, \lambda)$ и $N(r)$ принадлежат одному и тому же классу.

Следствие. Пусть $f(z)$ — мероморфная конечного порядка в единичном круге функция с нулями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ и полюсами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$. Тогда $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = e^{g(z)} \frac{\Pi(z, \alpha)}{\Pi(z, \beta)}$; порядок и тип регулярной в единичном круге функции $\exp g(z)$ не превосходят порядка и типа функции $f(z)$ *.

* В монографии (2) сообщается, что $f(z)$ можно разложить на множители, если последовательности $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ имеют конечное число предельных точек.

Теорема 2. Для любой данной последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_n| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 1$, и для произвольной конечной по строкам таблицы комплексных чисел

$$a_n^{(-l_n)}, a_n^{(-l_n+1)}, \dots, a_n^{(-1)}, a_n^{(0)}, \dots, a_n^{(k_n-l_n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq l_n \leq k_n,$$

можно построить такую мероморфную в единичном круге функцию $f(z)$, лорановское разложение которой в окрестности каждой из точек λ_n начинается с группы членов

$$\frac{a_n^{(-l_n)}}{(z - \lambda_n)^{l_n}} + \dots + \frac{a_n^{(-1)}}{z - \lambda_n} + a_n^{(0)} + \dots + a_n^{(k_n-l_n-1)} (z - \lambda_n)^{k_n-l_n-1},$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

что ее порядок и тип будут, соответственно, не выше, чем порядок и тип функции $N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$; здесь и в дальнейшем $n(t)$ обозначает число точек λ_n в круге радиуса t , причем каждая точка λ_n считается k_n раз.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} k_n (1 - |\lambda_n|) < \infty$, то можно построить функцию ограниченного вида с начальными членами лорановских разложений (1).

Заметим, что среди точек λ_i могут иметься полюсы функции $f(z)$ (если $l_i > 0$); однако совокупность всех полюсов $f(z)$, вообще говоря, не исчерпывается заданными точками. Иными словами, если мы потребуем, чтобы искомая функция $f(z)$ не имела бы других полюсов, помимо заданных, то нельзя уже будет утверждать, что порядок $f(z)$ может быть сделан не выше порядка $N(r)$.

Возникает вопрос, что можно сказать о порядке $f(z)$ при введении дополнительного предположения, что все полюсы $f(z)$ содержатся среди заданных точек $\{\lambda_i\}$?

Имеют место следующие предложения:

Теорема 3. Существует такая мероморфная в единичном круге функция $f(z)$, имеющая полюсы в точках λ_i , и только в них, с соответствующими главными частями

$$G(z, A_i, \lambda_i) = \frac{A_{i,1}}{z - \lambda_i} + \frac{A_{i,2}}{(z - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,k_i}}{(z - \lambda_i)^{k_i}}, \quad (2)$$

что ее порядок не превосходит числа $\rho = \max [\min (\nu - 1 + \mu, \nu), \beta]$; здесь ν — порядок последовательности $\{A_i\}$, $A_i = \max [|A_{i,1}|, |A_{i,2}|, \dots, |A_{i,k_i}|]$, μ — порядок функции $n_1(r)$, подсчитывающей число различных полюсов λ_i в круге радиуса r , и β — порядок функции $N(r)$:

$$\nu = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\lg^+ \lg^+ A_i}{\lg \frac{1}{1 - |\lambda_i|}}, \quad \mu = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\lg n_1(r)}{\lg \frac{1}{1-r}}, \quad \beta = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\lg N(r)}{\lg \frac{1}{1-r}}. \quad (3)$$

Если $\rho = \max [\min (\nu - 1 + \mu, \nu), \beta] = \beta$, то не найдется мероморфной функции с главными частями (2) меньшего порядка, чем β ; если $\rho = \min (\nu - 1 + \mu, \nu)$, то можно указать такие λ'_i , $|\lambda'_i| = |\lambda_i|$, и такие $A'_{i,j}$ (порядок последовательности $\{A'_i\}$, $A'_i = \max [|A'_{i,1}|, \dots, |A'_{i,k_i}|]$, равен ν), что не найдется мероморфной функции с главными частями $G(z, A'_i, \lambda'_i)$ меньшего порядка, чем $\rho = \min (\nu - 1 + \mu, \nu)$.

Теорема 4. Если все точки λ_i лежат в конечном числе некасательных к единичной окружности углов (предельные точки последовательности λ_i находятся в вершинах этих углов), то существует мероморфная в единичном круге функция $f(z)$ с главными частями (2), порядок которой не превосходит числа $\alpha = \max(\nu - 1, \beta)$; ν и β определены по формуле (3).

Фиксировав последовательность полюсов $\{\lambda_i\}$ и порядок последовательности $\{A_i\}$, можно подобрать коэффициенты главных частей так, чтобы не существовало мероморфной функции с данными главными частями меньшего порядка, чем α .

Заметим, что в случае $\alpha = \nu - 1$ может, вообще говоря, существовать мероморфная функция с главными частями (2) меньшего порядка, чем α .

Установить наименьший из возможных порядков всех функций, имеющих главные части (2) (при предположении теоремы 4), удается посредством следующего построения (1). Пусть $h > 1$ выбрано так, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\lambda_i|)^{h-1}$ сходится; опишем около каждой точки λ_i , как около центра, круг K_i радиуса $(1 - |\lambda_i|)^h$. Множество точек $\cup \bar{K}_i$ состоит из связных компонент (континуумов), которые назовем «облаками»; каждое «облако» образовано конечным числом кругов K_i и содержит конечное множество точек λ_i — группу полюсов. Обозначая «облака» буквами $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$, пронумеруем их так, чтобы наибольшие модули R_i точек «облаков» H_i не убывали.

Представим сумму всех главных частей (2), относящихся к группе полюсов $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,n_i}$ «облака» H_i , в виде

$$\frac{P_i(z)}{(z - \lambda_{i,1})^{k_{i,1}} (z - \lambda_{i,2})^{k_{i,2}} \dots (z - \lambda_{i,n_i})^{k_{i,n_i}}};$$

если $k_{i,1} + k_{i,2} + \dots + k_{i,n_i} = s_i$, то $P_i(z)$ есть многочлен степени $s_i - 1$.

Пусть P_i — наибольший из молекул коэффициентов многочлена $P_i(z)$ и пусть

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\lg^+ \lg^+ P_i}{\lg \frac{1}{1 - R_i}} = \gamma.$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Если все точки λ_i лежат в конечном числе некасательных к единичной окружности углов, то существует мероморфная в единичном круге функция с главными частями (2) порядка $\delta = \max(\gamma - 1, \beta)$ (β определяется по формуле (3)), но не существует мероморфной функции с теми же главными частями меньшего порядка.

Из теорем 3, 4 и 5 следует, что при некоторых условиях существует мероморфная нулевого порядка функция $f(z)$ с главными частями (2). Возникает вопрос, при каких условиях существует функция ограниченного вида с главными частями (2)?

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 6. Для того чтобы для любой таблицы комплексных чисел $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}, i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} (1 - |\lambda_i|) \lg^+ |a_{i,j}| < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad |\lambda_i| < 1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} |\lambda_i| = 1, \quad (4)$$

существовала ограниченного вида функция с главными частями

$$H(z, \lambda_i, a_i) = \frac{a_{i,1}}{z - \lambda_i} + \frac{a_{i,2}}{(z - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{a_{i,n}}{(z - \lambda_i)^n}, \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: а) $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\lambda_i|) < \infty$; б) все точки λ_i лежат в конечном числе некасательных к единичной окружности углов.

Если числа $|a_{i,j}|$ растут быстрее, чем это разрешается условием (4), т. е. $\lim_{i \rightarrow \infty} (1 - |\lambda_i|) \lg^+ |a_{i,j}| = \infty$ (для некоторого $1 \leq j \leq n$), то можно подобрать такие $a'_{i,j}$, $|a'_{i,j}| \leq |a_{i,j}|$, что не найдется функции ограниченного вида с главными частями $H(z, \lambda_i, a'_i)$.

Теорема 7. Условия $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\lambda_i|) < \infty$ и $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\lambda_i|) \lg^+ \frac{|A_i|}{(1 - |\lambda_i|)^2} < \infty$ достаточны для того, чтобы существовала функция ограниченного вида с главными частями $\frac{A_i}{z - \lambda_i}$. Если $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - |\lambda_i|) \lg^+ \frac{A_i}{1 - |\lambda_i|} = \infty$, то можно указать такие λ'_i , $|\lambda'_i| = |\lambda_i|$, что не найдется функции ограниченного вида с главными частями $\frac{A_i}{z - \lambda'_i}$.

Я выражаю глубокую благодарность проф. А. И. Маркушевичу, под руководством которого сделана эта работа.

Поступило
18 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. M. Whittaker, Proc. London Math. Soc., 40, 255 (1935). ² R. Nevanlinna, Le théorème Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, 1929.