Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Н. КРАЧКОВСКИЙ

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЬЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ЕГО ОБЛАСТИ ФРЕДГОЛЬМА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 17 XI 1952)

Пусть A — линейный ограниченный оператор, определенный на комплексном пространстве R типа (B) и отображающий R в себя. Наряду с A, будем рассматривать оператор $T_\lambda = E - \lambda A$, где E — тождественный оператор, а λ — комплексный параметр. Обозначим через Φ_A область Фредгольма оператора A, т. е. множество тех комплексных чисел λ, для которых оператор T_λ регулярен. Это означает, что если $\lambda \in \Phi_A$, то оператор T_λ нормально разрешим, а уравнения $T_\lambda x = 0$ и $T_\lambda^* X = 0$ (T_λ^* — оператор, сопряженный с T_λ) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.

Область Фредгольма есть открытое множество и является, следовательно, суммой конечного или счетного числа связных непересекающихся открытых множеств-компонент ([1], стр. 154). Мы будем различать компоненты двух типов, смотря по тому, конечное или бесконечное число линейно независимых нульэлементов ([2], стр. 189) отвечает каждой точке рассматриваемой компоненты. Оказывается, что все компоненты области Фредгольма могут быть только одного из этих двух типов.

Компоненты первого типа состоят, за исключением изолированных собственных значений оператора A, из точек обратимости оператора T_λ ([3], стр. 17), тогда как компоненты второго типа состоят сплошь из собственных значений оператора A. Сумма компонент первого типа образует открытое множество, называемое областью мероморфности оператора A.

Рассмотрим какую-нибудь компоненту G второго типа и пусть $\lambda_0 \in G$. Все линейные независимые нульэлементы оператора A, отвечающие его собственному значению λ_0, можно расположить в виде следующей таблицы:

$$\begin{gathered} x_k^{(1)},\ x_k^{(2)}, \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, s), \\ x_k^{(1)},\ x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(r_k)} \qquad (k = s+1, \ldots, s+p), \end{gathered} \tag{1}$$

состоящей из s бесконечных и p конечных строк, причем

$$\begin{gathered} \lambda_0 A x_k^{(1)} = x_k^{(1)},\ \lambda_0 A x_k^{(2)} = x_k^{(2)} + x_k^{(1)},\ \lambda_0 A x_k^{(3)} = x_k^{(3)} + x_k^{(2)}, \ldots \\ (k = 1, 2, .., s), \\ \lambda_0 A x_k^{(1)} = x_k^{(1)},\ \lambda_0 A x_k^{(2)} = x_k^{(2)} + x_k^{(1)}, \ldots,\ \lambda_0 A x_k^{(r_k)} = x_k^{(r_k)} + x_k^{(r_k - 1)} \\ (k = s+1, \ldots, s+p). \end{gathered} \tag{2}$$

Число p конечных строк может быть равно нулю, но s заведомо отлично от нуля, потому что G — компонента второго типа. Нижний индекс элемента $x_k^{(\nu)}$ означает, таким образом, номер строки, в которой написан рассматриваемый элемент, а верхний индекс, как легко видеть, указывает ранг нульэлемента, т. е. указывает, что на элементе $x_k^{(\nu)}$ обращается в нуль ν-я итерация оператора T_λ, тогда как $(\nu-1)$-я итерация отлична от нуля. Отметим, что хотя элементы, составляющие таблицу (1), могут известным образом перераспределяться, но структура таблицы, т. е. число конечных и бесконечных строк, а также число элементов в каждой строке, неизменна при всех таких перераспределениях. Ту же структуру будет иметь и таблица всех линейно независимых нульфункционалов (т. е. нульэлементов сопряженного оператора A^*), отвечающих значению λ_0:

$$
\begin{aligned}
&X_k^{(1)},\ X_k^{(2)},\ldots \qquad (k=1,2,\ldots,s),\\
&X_k^{(1)},\ X_k^{(2)},\ldots,X_k^{(r_k)} \qquad (k=s+1,\ldots,s+p).
\end{aligned} \tag{3}
$$

При этом надлежащим перераспределением элементов в таблице (1) или (3) можно добиться, чтобы выписанные подряд конечные строки таблицы (3) образовали биортогональную систему с таким же образом выписанными конечными строками таблицы (1). Мы будем предполагать это условие выполненным. Что же касается нульфункционалов из бесконечных строк таблицы (3), то они обращаются в нуль на всех элементах таблицы (1). Аналогично, на нульэлементах из бесконечных строк таблицы (1) обращаются в нуль все нульфункционалы таблицы (3). Заметим еще, что если рассматривать нульэлементы и нульфункционалы, соответствующие каким-нибудь различным собственным значениям λ_1 и λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ оператора A, то все нульфункционалы, отвечающие одному из этих чисел, обращаются в нуль на нульэлементах, отвечающих другому числу.

Введем в рассмотрение конечномерный оператор A_0, определенный равенством

$$
A_0x=\frac{1}{\lambda_0}\sum_{k=s+1}^{s+p}\left[x_k^{(1)}X_k^{(1)}(x)+\left(x_k^{(2)}+x_k^{(1)}\right)X_k^{(2)}(x)+\cdots\right.
$$
$$
\left.\cdots+\left(x_k^{(r_k)}+x_k^{(r_k-1)}\right)X_k^{(r_k)}(x)\right].
$$

На основании сказанного выше нетрудно видеть, что оператор $A'=A-A_0$ имеет в точности те же нульэлементы (вплоть до структуры таблиц), что и оператор A, за исключением тех нульэлементов последнего, которые составляют конечные строки таблицы (1).

Теорема 1. *Для значения λ_0 существует такая его окрестность D, каждой точке которой (за исключением самой точки λ_0, если $p\neq 0$) соответствует ровно s линейно независимых собственных элементов оператора A.*

Доказательство. Существование окрестности D', для каждой точки которой имеется по меньшей мере s линейно независимых собственных элементов, вытекает из доказательства теоремы 4 (([3]), стр. 16). Остается установить, что существует такая окрестность $D\subset D'$ значения λ_0, каждой точке которой, за исключением λ_0, соответствует не больше, чем s, линейно независимых собственных элементов. При этом достаточно провести рассуждение для оператора A'. Предполагая противное, будем иметь последовательность чисел $\lambda_1, \lambda_2,\ldots$, стремящуюся к λ_0, такую, что для каждого λ_ν имеется $s+1$ линейно независимых собственных элементов оператора A'. Можно считать, что первые s из них $x_{k\nu}^{(1)}$ $(k=1, 2, \ldots, s)$ это те, которые построены при помощи бесконечных строк нульэлементов таблицы (1) (так, как это сделано при доказательстве упомянутой теоремы 4) и которые, следовательно, стремятся, соответственно, к $x_k^{(1)}$ $(k=1, 2, \ldots, s)$ при $\nu \to \infty$. Обозначим $(s+1)$-й собственный элемент, отвечающий значению λ_ν, через y_ν, причем можно считать (([2]), стр. 179), что $\|y_\nu\|=1$ и что расстояние от y_ν до пространства L_ν элементов $x_{k\nu}^{(1)}$ $(k=1, 2, \ldots, s)$ больше $^1/_2$. Итак, $y_\nu - \lambda_\nu A' y_\nu = 0$, откуда, имея в виду представление $E - \lambda_0 A' = u + v$, где u — обратимый оператор, отображающий R на себя, а v вполне непрерывный оператор (([1]), стр. 149), получим:

$$u_\nu y_\nu + v y_\nu = 0, \quad u_\nu = u - (\lambda_\nu - \lambda_0) A'.$$

Отсюда, в силу обратимости оператора u_ν (при достаточно больших ν), будем иметь $y_\nu + u_\nu^{-1} v y_\nu = 0$. Вполне непрерывные операторы $u_\nu^{-1} v$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ стремятся по норме операторов к $u^{-1}v$, и потому можно выделить сходящуюся подпоследовательность $y_{\nu_1}, y_{\nu_2}, \ldots$ Переходя к пределу в равенстве $y_{\nu_r} + u_{\nu_r}^{-1} v y_{\nu_r} = 0$ при $r \to \infty$, получим $y_0 + u^{-1} v y_0 = 0$. При этом $\|y_0\| = 1$ и расстояние от y_0 до пространства L элементов $x_k^{(\nu)}$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ не меньше $^1/_2$. Но оператор A' имеет для значения λ_0 только s линейно независимых решений и, следовательно, мы получили противоречие, чем теорема и доказана.

Теорема 2. *Каждому значению λ из окрестности D, рассмотренной в предыдущей теореме, отвечает одно и то же число s бесконечных строк нульэлементов.*

Доказательство. Больше, чем s, это число быть не может, потому что всякому значению $\lambda \in D$ соответствует s линейно независимых собственных элементов. Допустим, что некоторому значению $\lambda^* \in D$ $(\lambda^* \neq \lambda_0)$ отвечает меньшее, чем s, число бесконечных строк. Тогда, имея в виду теорему 1, заключаем, что существует окрестность D^* значения λ^*, каждой точке которой (за исключением самой точки λ^*) соответствует меньшее, чем s, число линейно независимых собственных элементов. Так как пересечение D^* и D не пусто, то это означает противоречие, и теорема тем самым доказана.

Теорема 3. *Для всех значений λ, взятых из одной и той же компоненты G области Φ_A, число бесконечных строк в таблице нульэлементов одно и то же (это число равно нулю для компоненты первого типа).*

Доказательство. Пусть λ_1 и λ_2 — какие-нибудь две точки из одной и той же компоненты G. Соединим λ_1 и λ_2 кривой C, лежащей внутри G, и около каждой точки этой кривой опишем круг так, чтобы всем его точкам отвечало одно и то же число бесконечных строк. Из полученного множества кругов можно выделить конечное число кругов, которые, вместе взятые, покрывают C. Отсюда ясно, что значениям λ_1 и λ_2 отвечает одинаковое число бесконечных строк, и теорема доказана.

Пусть F — множество тех точек рассматриваемой компоненты G, для которых в таблице нульэлементов имеются конечные строки $(p \neq 0)$. На основании доказанных теорем легко заключить, что множество F состоит из изолированных точек.

Таким образом, для всех точек одной и той же компоненты G области Φ_A, за исключением, может быть, изолированного множества F, число линейно независимых собственных элементов постоянно (равно числу бесконечных строк нульэлементов); что касается точек, принадлежащих F, то им отвечает большее число линейно независимых собственных элементов. Полученный иным путем, этот результат содержится в работе И. Ц. Гохберга ((4), стр. 629). Итак, если не принимать во внимание дополнительные собственные элементы, отвечающие значениям λ из множества F, то каждому значению λ из одной и той же компоненты G отвечает определенное конечномерное пространство s измерений, базисом которого служат элементы, возглавляющие бесконечные строки нульэлементов. Эти элементы могут быть ((3), стр. 17) в некоторой окрестности любого значения $\lambda_0 \in G$ записаны в виде степенного ряда, расположенного по степеням $\lambda - \lambda_0$. Отсюда ясно, что упомянутое конечномерное пространство будет непрерывно изменяться, когда λ изменяется в пределах одной и той же компоненты G.

Рассматривая итерации оператора T_λ и снова отвлекаясь от дополнительных нульэлементов, отвечающих точкам из множества F, нетрудно видеть, что совокупность тех нульэлементов, ранг которых не превышает какого-нибудь значения ν, образует конечномерное пространство $L_\lambda^{(\nu)}$ с одним и тем же числом измерений $s \cdot \nu$ для всех точек компоненты G. При этом, если λ изменяется в пределах компоненты G, то пространство $L_\lambda^{(\nu)}$, где ν считается фиксированным, зависит непрерывно от λ.

Поступило
14 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, 7, № 3 (1943). [2] Ф. Рисс, Усп. матем. наук, в. 1 (1936). [3] М. А. Гольдман, С. Н. Крачковский, ДАН, 86, № 1 (1952). [4] И. Ц. Гохберг, ДАН, 78, № 4 (1951).