

И. Л. КАРОЛЬ

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО  
ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 XI 1952)

В большинстве работ по теории линейных уравнений в частных производных смешанного типа с двумя независимыми переменными рассматривались лишь уравнения, у которых касательная к параболической линии ни в одной точке не совпадает с характеристическим направлением уравнения в этой точке.

В настоящей заметке исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа:

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y |y|^m u_{yy} = 0. \quad (1)$$

Параболическая линия этого уравнения — ось  $y = 0$  — является огибающей обоих семейств его характеристик:

$$\xi = x - \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} = \operatorname{const}; \quad \eta = x + \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} = \operatorname{const}. \quad (2)$$

В полуплоскости  $y < 0$ , после перехода к переменным  $\xi$  и  $\eta$  ( $\eta \geq \xi$ ) уравнение (1) приведет к уравнению Эйлера — Дарбу:

$$u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi} (u_\eta - u_\xi) = 0, \quad (3)$$

где  $\beta = m/2(m-2)$  и  $-0,5 < \beta < 0$  при  $0 < m < 1$ . Как и для других уравнений смешанного типа (1), для уравнения (1) можно поставить следующую краевую задачу.

Задача Т (Трикоми). Дана область  $\Omega$ , ограниченная: двумя характеристиками (2)  $AC$  и  $BC$  разных семейств, выходящими из точки  $C$  в полуплоскости  $y < 0$  и касающимися оси  $y = 0$  в точках  $A$  и  $B$ ; простой кривой  $\Gamma$ , лежащей целиком в полуплоскости  $y > 0$  и опирающейся на отрезок  $AB$  оси  $y = 0$ , который без ограничения общности считаем совпадающим с промежутком  $[0, 1]$  оси  $x$ . Часть области  $\Omega$ , лежащую в полуплоскости  $y > 0$  ( $y < 0$ ), обозначим  $\Omega_+$  ( $\Omega_-$ ). Требуется определить непрерывную в  $\Omega$  функцию  $u(x, y)$  ( $u \in C\Omega$ ) такую, что: 1) в  $\Omega_+$   $u(x, y)$  дважды непрерывно дифференцируема ( $u \in C^{(2)}\Omega_+$ ) и удовлетворяет уравнению (1); 2) в  $\Omega_-$   $u \in C^{(1)}\Omega_-$  и является обобщенным решением уравнения (1), определенным ниже; 3) производные

$u_x$  и  $u_y$  непрерывны в  $\Omega$ ; 4) краевые значения  $u(x, y)$  заданы на незамкнутом контуре  $\Gamma + AC$ :

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l \quad (4)$$

( $s$  — длина дуги  $\Gamma$ , отсчитываемая от  $B$  к  $A$ ,  $l$  — длина  $\Gamma$ );

$$u|_{AC} = u|_{\xi=0} = \psi(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (5)$$

( $\varphi(l) = \psi(0)$ ).

Докажем существование и единственность решения задачи Т уравнения (1) в случае, когда кривая  $\Gamma$  совпадает со специальной так называемой «нормальной» кривой:

$$y = (1 - 2\beta)^{2\beta-1} [x(1-x)]^{1-\beta}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6)$$

Краевые данные  $\varphi(s)$  и  $\psi(\eta)$  должны удовлетворять следующим условиям:

I.  $\psi(\eta)$  непрерывна с первой производной в  $[0, 1]$  ( $\psi(\eta) \in C^{(1)}[0, 1]$ ) и имеет в  $(0, 1)$  ограниченную вторую производную.

II.  $\varphi(s) \in C[0, l]$  и в окрестности точек  $A(s=l)$  и  $B(s=0)$  имеет непрерывную вплоть до этих точек производную  $\varphi'(s)$  такую, что существуют конечные пределы:  $\lim [\varphi'(s) - \varphi'(0)] s^{-\gamma}$  при  $s \rightarrow +0$  в точке  $B$  и  $\lim [\varphi'(s) - \varphi'(l)] (l-s)^{-\gamma}$  при  $s \rightarrow l-0$  в точке  $A$ , где  $\gamma \geq 1 - m > 0$ . Вычитая, если нужно, из  $u(x, y)$  частное решение уравнения (1) — билинейную функцию, будем считать, что  $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi'(0) = \varphi'(l) = \psi(0) = 0$ , и так как касательная к  $\Gamma$  в точках  $A$  и  $B$  параллельна оси  $y$ , то  $\varphi(s)$  еще можно представить в виде:

$$\varphi(s) = \varphi^*(x) = y^{2-m} \bar{\varphi}(x), \quad (7)$$

где  $\bar{\varphi}(x) \in C[0, 1]$ .

Сначала в области  $\Omega_-$  для уравнения (1) или (3) решаем задачу Коши с начальными данными на параболической линии.

$$\lim u(x, y) = \tau(x_0) \text{ при } (x, y) \rightarrow (x_0, -0) \text{ и } 0 \leq x_0 \leq 1; \quad (8)$$

$$\lim u_y = \nu(x_0) \text{ при } (x, y) \rightarrow (x_0, -0) \text{ и } 0 < x_0 < 1.$$

Если  $\tau(x) \in C^{(3)}[0, 1]$ ,  $\nu(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ , то единственное непрерывное в  $\Omega_-$  и дважды непрерывно дифференцируемое в  $\Omega_-$  решение задачи запишется в виде:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = & x_1 (\eta - \xi)^{-(1+2\beta)} \int_{\xi}^{\eta} \tau(t) (\eta - t)^{\beta} (t - \xi)^{\beta} dt - \\ & - \frac{x_1}{2(1+2\beta)} (\eta - \xi)^{-(1+2\beta)} \left\{ \int_{\xi}^{\eta} \tau'(t) [(\eta - t)^{1+\beta} (t - \xi)^{\beta} - (\eta - t)^{\beta} (t - \xi)^{1+\beta}] dt \right\} - \\ & - x_2 \int_{\xi}^{\eta} \nu(t) (\eta - t)^{-\beta} (t - \xi)^{-\beta} dt, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $x_1 = \Gamma(2+2\beta)\Gamma^{-2}(1+\beta)$ ,  $x_2 = [2(1-2\beta)]^{2\beta-1}\Gamma(2-2\beta)\Gamma^{-2}(1-\beta)$ .

Будем считать, что функция  $u(\xi, \eta)$  есть обобщенное решение задачи Коши для уравнения (1) или (3) из класса  $R$ , если ее можно представить в виде (9), где  $\tau(x) = \int_0^x T(t) (x-t)^{-2\beta} dt$ , а  $T(t)$  и  $\nu(t)$  не-

прерывны и интегрируемы в  $(0, 1)$ . Обобщенное решение из класса  $R$  имеет в  $\Omega_-$  непрерывные производные  $u_x, u_y, u_{x\eta}$  и удовлетворяет уравнению (3) в классическом смысле. Однако как функция  $x, y$  оно имеет в  $\Omega_-$  лишь непрерывные вплоть до внутренних точек отрезка  $AB$  первые производные  $u_x, u_y$  и удовлетворяет условиям (8).

Для решения класса  $R$  из краевого условия (5) получается следующее соотношение между  $\tau(x), \nu(x)$  и  $\psi(x)$ :

$$\tau(x) = x_3 \int_0^x \nu(t) (x-t)^{-2\beta} dt + \Psi(x), \quad (10)$$

где  $x_3 = 2 \cos \pi\beta \cdot x_2$ ,

$$\Psi(x) = \frac{\sin 2\pi\beta}{\pi\beta} \int_0^x (x-t)^{-2\beta} \left[ \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \psi(\lambda) (t-\lambda)^\beta d\lambda \right] dt. \quad (11)$$

В области  $\Omega_+$  для эквивалентного уравнению (1) уравнения:

$$y^{-m} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (12)$$

решаем краевую задачу N:

Определить непрерывную в  $\bar{\Omega}_+$  функцию  $u(x, y)$  такую, что  $u \in C^{(2)}\Omega_+$  и удовлетворяет уравнению (12) или (1); на  $\Gamma$   $u(x, y)$  удовлетворяет условию (4), а на  $AB$  условию:  $\lim u_y = \nu(x_0)$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, +0)$  и  $0 < x_0 < 1$ , где  $\nu(x)$  непрерывна и интегрируема в  $(0, 1)$ .

Нетрудно показать, что решение этой задачи единственно.

Исходя из фундаментального (с логарифмической особенностью) решения уравнения (12)

$$q(x', y', x, y) = kr_1^{-2\beta} F(\beta, \beta, 2\beta, 16) (2-m)^{-2} (y'y)^{1-m/2} r_1^{-2}, \quad (13)$$

где  $k = [2(1-2\beta)]^{2\beta} \Gamma^2(\beta) / 4\pi\Gamma(2\beta)$ ;  $r_1^2 = (x' - x)^2 + 4(2-m)^{-2} (y'^{1-m/2} + y^{1-m/2})$ , в случае области  $\Omega_+$ , ограниченной нормальной кривой (6), нетрудно построить функцию Грина задачи N в явном виде таким же приемом, как и функцию Грина уравнения Лапласа для круга. Тогда значение решения задачи N на отрезке  $AB$  (при указанных выше условиях для  $\nu(t)$  и  $\varphi(s)$ ) имеет вид:

$$\tau(x) = u(x, 0) = -k \int_0^1 \nu(t) [|t-x|^{-2\beta} - (x+t-2tx)^{-2\beta}] dt + \Phi(x), \quad (14)$$

где

$$\Phi(x) = k2\beta(1-2\beta)^{-2\beta} x(1-x) \times \int_0^1 \varphi^*(t) [t(1-t)]^{-1/\alpha+\beta} [x^2 + (1-2x)t]^{-(1+\beta)} dt. \quad (15)$$

В силу непрерывности  $u(x, y)$  и  $u_y$  во внутренних точках  $AB$ , приравняем в соотношениях (10) и (14) левые части и получим для определения  $\nu(x)$  интегральное уравнение, которое при дополнительном предположении:

$$\nu(x) \in \text{Lip } \delta(0, 1) \quad \delta > 0, \quad (16)$$

приводится к сингулярному интегральному уравнению:

$$v(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right) v(t) dt = f(x), \quad (17)$$

где

$$\lambda = -\cos \pi\beta/\pi (1 + \sin \pi\beta) \text{ и } f(x) = \lambda (2k\beta)^{-1} \left\{ [2\psi'(0) - \Phi'(0)] x^{2\beta} + \right. \\ \left. + 2x^\beta \int_0^x \psi''(t) (x-t)^\beta dt - \int_0^x \Phi''(t) (x-t)^{2\beta} dt \right\}. \quad (18)$$

Можно показать, что из (7) следует ограниченность  $\Phi''(t)$  на  $[0, 1]$ , а тогда из (18) и условия I по теореме Харди и Литтльвуда<sup>(2)</sup>  $f(x) \in \text{Lip}(1+2\beta)(0, 1)$ . Как известно<sup>(3)</sup>, общее решение уравнения (17) в классе  $B$  функций  $v(x)$ , удовлетворяющих условию (16) и таких, что  $v(x) \ln x(1-x)$  интегрируемо на  $[0, 1]$ , имеет вид:

$$v(x) = v^*(x) + Ax^{\beta-1/2} (1-x)^{\beta-1/2}, \quad (19)$$

где

$$v^*(x) = \frac{1}{2} (1 + \sin \pi\beta) \left\{ f(x) + \lambda \int_0^1 \left[ \frac{t(1-t)}{x(1-x)} \right]^{1/2-\beta} \left( \frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx} \right) f(t) dt \right\}, \quad (20)$$

а  $A$  — произвольная постоянная.

Исследование произведения  $v^*(x)$  на концах промежутка  $[0, 1]$  показывает, что имеет место оценка:

$$v^*(x) = x^{2\beta} (1-x)^{\beta-1/2} O(1).$$

Поэтому, чтобы  $v(x)$  не выходила из класса  $B$ , в выражении (19) надо положить  $A=0$ , и правая часть (20) является единственным в классе  $B$  решением уравнения (17). Этим установлено существование решения задачи  $T$ , значения которого в  $\Omega_+$  определяются из решения задачи  $N$ , а в  $\Omega_-$  — из выражения (9), причем здесь решение задачи  $T$  есть обобщенное решение уравнения (1) из класса  $R$ .

Как следует из (5), (7), (15), (18), (20), а также из единственности решения задачи  $N$  и задачи Коши, это решение задачи  $T$  уравнения (1) единственно. Теорему единственности решения задачи  $T$  для уравнения (1) в области  $\Omega$ , ограниченной в полуплоскости  $y > 0$  произвольной кривой  $\Gamma$ , а priori доказать пока не удалось. Поэтому остается открытым и вопрос о существовании решения в этом случае.

Поступило  
31 X 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Ф. Трикоми, О линейных уравнениях смешанного типа, М.—Л., 1947.  
<sup>2</sup> А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939. <sup>3</sup> С. Г. Михлин, ДАН; 59, № 6 (1948).