

Я. Л. ГЕРОНИМУС

**О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 3 XI 1952)

1. Будем говорить, что аналитическая функция  $\varphi(z)$  принадлежит классу  $H_p \subset H_p$  ( $p > 1$ ), если ее граничная функция  $\varphi(e^{i\theta})$  принадлежит классу  $\text{Lip}\left(\frac{1}{p}; p\right)^*$ .

Легко показать, что в этом случае существует система многочленов  $\{R_n(z)\}$  такая, что в метрике  $L^p$  имеем

$$\|\varphi - R_n\| = O(n^{-1/p}). \quad (1)$$

Для этих многочленов, осуществляющих среднее приближение функции  $\varphi(e^{i\theta})$ , весьма просто решается вопрос об их ограниченности на окружности и о связи асимптотических величин их значений со значениями функции  $\varphi(z)$ .

Теорема 1. Если  $\varphi(z) \in H_p$ , то:

1) из равномерной ограниченности системы многочленов

$$|R_n(e^{i\theta})| \leq M, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2)$$

вытекает равномерная ограниченность функции  $\varphi(z)$  в области  $|z| < 1$ ;

2) если  $|\varphi(e^{i\theta})| \leq M'$  почти всюду в  $[0, 2\pi]$ , то система  $\{R_n(z)\}$  равномерно ограничена в замкнутой области  $|z| \leq 1$ ;

3) если ввести обозначение

$$M_n = \max_{|z| \leq 1} |R_n(z)| = |R_n(e^{i\theta_0})|, \quad (3)$$

то имеет место асимптотическое равенство

$$M_n \sim |\varphi(re^{i\theta_0})|, \quad 1 - r = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4)$$

Доказательство аналогично приведенному в (1). Пользуясь интегралом Пуассона, находим

$$|\varphi(re^{i\theta}) - R_n(re^{i\theta})| \leq C_1, \quad 1 - r \geq \frac{1}{2n}. \quad (5)$$

Далее имеем по (1)

$$|R_n(re^{i\theta_0}) - R_n(e^{i\theta_0})| \leq \frac{M_n}{2}, \quad 1 - r \leq \frac{1}{2n}. \quad (6)$$

Из (5) находим

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq C_1 + M_n, \quad 1 - r \geq \frac{1}{2n}, \quad (7)$$

\* Под граничной функцией подразумеваем  $\varphi(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \varphi(re^{i\theta})$ .

откуда вытекает утверждение 1). Из (5), (6) находим

$$\frac{2}{3} |\varphi(re^{i\theta_0})| - \frac{2}{3} C_1 \leq M_n \leq 2 |\varphi(re^{i\theta_0})| + 2C_1, \quad r = 1 - \frac{1}{2n}, \quad (8)$$

откуда вытекают утверждения 2), 3).

Примечание 1. Теорема справедлива для функций  $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ , для которых

$$\left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^{p'} \right\}^{1/p'} = O(n^{-1/p})^*, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (9)$$

Действительно, полагая  $R_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ , мы имеем при  $1 - r = O\left(\frac{1}{n}\right)$ :

$$\begin{aligned} |\varphi(z) - R_n(z)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k \right| \leq \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^{p'} \right\}^{1/p'} \cdot \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{kp} \right\}^{1/p} = \\ &= r^{n+1} (1 - r^p)^{-1/p} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^p \right\}^{1/p'} \leq C_2. \end{aligned}$$

2. Рассмотрим теперь многочлены  $\{\hat{P}_n(z)\}$ , ортогональные и нормальные относительно обложения  $d\sigma(\theta)$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{P}_n(e^{i\theta}) \overline{\hat{P}_k(e^{i\theta})} d\sigma(\theta) = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k. \end{cases} \quad \hat{P}_n(z) = \alpha_n z^n + \dots \quad (10)$$

Теорема 2. При условии

$$\varepsilon_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{P}_k(0)|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (11)$$

равномерная ограниченность системы  $\{\hat{P}_n(z)\}$  на окружности эквивалентна равномерной ограниченности в области  $|z| < 1$  функции

$$\pi(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \lg \sigma'(\theta) d\theta \right\}, \quad |z| < 1; \quad (12)$$

кроме того, имеем асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} M_n = \max |\hat{P}_n^*(z)| &= |\hat{P}_n^*(e^{i\theta_0})| \sim |\pi(re^{i\theta_0})|, \quad 1 - r = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (13) \\ \hat{P}_n^*(z) &= z^n \bar{\pi}\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Отметим прежде всего, что условие  $\varepsilon_n = o(1)$  эквивалентно суммируемости функции  $\lg \sigma'(\theta)$ , а также существованию пределов (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_n(z) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_n^*(z) = \pi(z); \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{P}_k(z)|^2 = \frac{|\pi(z)|^2}{1 - |z|^2}, \quad |z| < 1; \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha = \pi(0) > 0.$$

\* При  $p > 2$  из (9) вытекает, что  $\varphi(z) \in H_p$ ; при  $p \leq 2$  из  $\varphi(z) \in H_p$  вытекает (9) (теорема Юнга — Хаусдорфа).

Пользуясь разложениями (2)

$$\begin{aligned} \pi(z)\pi(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}_k(z) \overline{\hat{P}_k(0)}, \quad |z| < 1; \\ \hat{P}_n^*(z) \hat{P}_n^*(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}_k(z) \overline{\hat{P}_k(0)}, \end{aligned} \quad (15)$$

приходим к двойному неравенству

$$1 - C_3 < \frac{\alpha}{\alpha_n} (1 - C_3) < \left| \frac{\hat{P}_n^*(re^{i\theta_0})}{\pi(re^{i\theta_0})} \right| < \frac{\alpha}{\alpha_n} (1 + C_3) < \frac{\alpha}{\alpha_0} (1 + C_3), \quad (16)$$

где величину  $C_3 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{1-r}}$  всегда можно сделать меньше единицы, выбирая  $1-r > \frac{\varepsilon_n}{\alpha^2}$ ; из (16) вытекает справедливость теоремы 2.

3. Возникает естественно вопрос о тех условиях, которым должно быть подчинено обложение  $d\sigma(\theta)$  для выполнения (11). В нашей заметке (1) дано достаточное условие: функция  $\sigma(\theta)$  должна быть абсолютно непрерывной, причем почти всюду в  $[0, 2\pi]$

$$0 < m_1 \leq \sigma'(\theta) \leq m_2, \quad (17)$$

и, кроме того,

$$\sigma'(\theta) \in \text{Lip}(\alpha, 2), \quad \alpha \geq 1/2.$$

Это условие, однако, слишком ограничительно — пример, рассмотренный в (2) § 24, показывает, что (11) может выполняться и для функции  $\sigma(\theta)$ , имеющей разрывы непрерывности.

Отметим еще одно общее и простое достаточное условие для выполнения (11) и (13), которому подчинен не вес, а старший коэффициент.

**Теорема 3.** Если старший коэффициент  $\alpha_n$  многочлена  $\hat{P}_n(z)$  таков, что

$$\alpha_n - \alpha = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (18)$$

где  $\alpha$  — некоторая положительная постоянная, то выполняется (13).

Доказательство основано на соотношении

$$\alpha^2 - \alpha_n^2 = \varepsilon_n.$$

Если ввести пространство  $L_\sigma^2(0, 2\pi)$  с нормой

$$\|f\|_\sigma = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\sigma(\theta) \right\}^{1/2}, \quad (19)$$

и назвать величину

$$d_n = \min_{a_k} \left\| \pi(e^{i\theta}) - \sum_{k=0}^n a_k e^{ik\theta} \right\|_\sigma \quad (20)$$

расстоянием от функции  $\pi(z)$  до подпространства многочленов степени не выше  $n$ , то вместо (18) можно сформулировать условие, где будет фигурировать лишь функция  $\sigma(\theta)$ .

**Теорема 4.** Если абсолютно непрерывная компонента функции  $\sigma(\theta)$  такова, что расстояние  $d_n$  удовлетворяет условию

$$d_n - d = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (21)$$

где  $d$  — положительная постоянная, то модуль-максимум экстремального многочлена  $\hat{P}_n^*(z)$  удовлетворяет (13).

4. Рассмотрим теперь многочлены  $\{\hat{p}_n(x)\}$ , ортогональные и нормальные на отрезке  $[-1, +1]$  относительно обложения  $d\psi(x)$ . Полагая

$$\psi(x) = \psi(\cos \theta) = -\tau(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (22)$$

мы можем выразить многочлены  $\{\hat{p}_n(x)\}$  через рассмотренные выше многочлены  $\{\hat{P}_n(z)\}$  посредством формулы (2)

$$\hat{p}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \{1 + \hat{P}_{2n}(0) : \hat{P}_{2n}^*(0)\}}} \cdot \frac{\hat{P}_{2n}^*(z) + \hat{P}_{2n}(z)}{z^n} = k_n x^n + \dots, \quad (23)$$

$$z = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

причем функция  $\tau(z)$  может быть связана непосредственно с функцией  $\psi(x)$ :

$$\sqrt{1 - x^2} \psi'(x) = \frac{1}{\pi (e^{i\theta})^2}, \quad x = \cos \theta. \quad (24)$$

**Теорема 5.** Если старший коэффициент  $k_n$  многочлена  $\hat{p}_n(x)$  таков, что

$$2^{-n} k_n - \gamma = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (25)$$

где  $\gamma$  — некоторая положительная постоянная, то

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\hat{p}_n(x)| \leq M_n \sim |\pi (re^{i\theta_0})|, \quad 1 - r = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (26)$$

Доказательство основано на соотношении

$$\alpha_{2n} \sqrt{\alpha_{2n} + \hat{P}_{2n}(0)} - \alpha = \sqrt{2\pi} (2^{-n} k_n - \gamma), \quad (27)$$

вытекающем из формулы (3.39) нашей статьи (2).

Рассмотрим в качестве примера многочлены Якоби, соответствующие весу

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \psi(x) = \int_{-1}^x w(x) dx, \quad \alpha, \beta > -1; \quad (28)$$

по (24) легко видеть, что в этом случае

$$\pi(z) = 2^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}} (1-z)^{-\alpha-1/2} (1+z)^{-\beta-1/2}. \quad (29)$$

Для многочленов Якоби имеем ((3), стр. 100)

$$k_n^2 = \frac{(2n + \alpha + \beta + 1) \Gamma^2(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^{2n + \alpha + \beta + 1} \Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}. \quad (30)$$

Применяя формулу Стирлинга, найдем, что  $2^{-2n} k_n^2 - \gamma^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $\gamma = \frac{\pi(0)}{\sqrt{2\pi}}$ ; поэтому по (13), (20) имеем при  $\alpha, \beta \geq -1/2$

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\hat{p}_n(x)| \sim n^{\omega + 1/2}, \quad \omega = \max(\alpha, \beta); \quad (31)$$

максимум достигается на том конце отрезка, который соответствует большему из чисел  $\alpha, \beta$ .

Поступило  
3 XI 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Я. Л. Геронимус, ДАН, 83, № 1 (1952). <sup>2</sup> Я. Л. Геронимус, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. 4, 19, 35 (1938). <sup>3</sup> Г. Полиа, Г. Сегё, Задачи и теоремы из анализа, ч. II, М., 1937.