Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Л. С. АТАНАСЯН

О НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ЧАСТНОГО ВИДА, ВЛОЖЕННЫХ В ЦЕНТРОАФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 XI 1952)

1°. Векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ от m скалярных аргументов $x^1, x^2, \ldots, x^m$, заданная в n-мерном плоском аффинном или центроаффинном пространстве E_n, определяет многообразие m измерений V_m, в каждой точке которого определяется касательная m-плоскость σ, порожденная векторами:

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m, \quad \text{где } \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \tag{1}$$

(в предположении, что векторы $\mathbf{r}_i$ линейно независимы).

Пусть в каждой точке V_m заданы $n-m$ векторов

$$\underset{1}{\bar{\xi}}, \underset{2}{\bar{\xi}}, \ldots, \underset{n-m}{\bar{\xi}} \tag{2}$$

так, что совокупность векторов (1), (2) линейно независима. Векторы (2) называются оснащающими векторами V_m, а само V_m — оснащенным многообразием.

Разлагая векторы $\mathbf{r}_{ij} = \partial^2 \mathbf{r} / \partial x^i \partial x^j$ и $\underset{\varkappa}{\bar{\xi}}_i = \partial \underset{\varkappa}{\xi} / \partial x^i$ (где $i, j = 1, 2, \ldots, m$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, n-m$, по векторам $\mathbf{r}_i, \underset{\varkappa}{\bar{\xi}}$, будем иметь:

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma^h_{ij} \mathbf{r}_h + \overset{\varkappa}{h}_{ij} \underset{\varkappa}{\bar{\xi}}; \quad \overset{\varkappa}{h}_{ij} = \overset{\varkappa}{h}_{ji}; \tag{3}$$

$$\underset{\varkappa}{\bar{\xi}}_i = \underset{\varkappa}{\beta}{}^h_i \mathbf{r}_h + \underset{\varkappa}{\overset{\lambda}{\gamma}}_i \underset{\lambda}{\bar{\xi}}, \tag{4}$$

где $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n-m$.

При преобразовании параметризации на многообразии V_m величины Γ^h_{ij} преобразуются как компоненты аффинной связности, а $\overset{\varkappa}{h}_{ij}$, $\underset{\varkappa}{\beta}{}^h_i$, $\underset{\varkappa}{\overset{\lambda}{\gamma}}_i$ при фиксированных $\varkappa$ и λ — как компоненты тензоров; величины Γ^h_{ij}, в отличие от $\overset{\varkappa}{h}_{ij}$, $\underset{\varkappa}{\beta}{}^h_i$ и $\underset{\varkappa}{\overset{\lambda}{\gamma}}_i$, зависят только от оснащающих плоскостей $E_{n-m}\{\underset{1}{\bar{\xi}}, \ldots, \underset{n-m}{\bar{\xi}}\}$ и не зависят от оснащающих векторов.

Таким образом, каждому оснащению на V_m соответствуют величины:

$$\Gamma^h_{ij}, \overset{\varkappa}{h}_{ij}, \underset{\varkappa}{\beta}^h_i, \underset{\varkappa}{\overset{\lambda}{\gamma}}_i, \tag{5}$$

удовлетворяющие условиям интегрируемости уравнений (3) и (4). Эти условия аналогичны уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи римановых многообразий*.

При изучении многообразий частного вида в первую очередь мы встречаемся с так называемыми развертывающимися многообразиями, которые хорошо известны в литературе**.

Понятие развертывающегося многообразия допускает следующее обобщение:

Определение. Многообразие V_m будем называть s-вырожденным многообразием ранга r, если оно состоит из ∞^r «образующих» V_{n-r} и во всех точках одной и той же образующей касательные плоскости σ к V_m параллельны некоторой плоскости E_s (где $n > s \geqslant m$).

Очевидно, что всякое многообразие V_m, которое вмещено в $E_{n'} \subset E_n$, где $n' < n$, можно рассматривать как n'-вырожденное многообразие любого ранга.

Кроме того из этого определения следует также, что всякое развертывающееся многообразие есть m-вырожденное многообразие. Можно показать, что и обратно — всякое m-вырожденное многообразие есть развертывающееся.

Следующая теорема характеризует s-вырожденные многообразия.

Теорема 1. *V_m является s-вырожденным многообразием ранга r тогда и только тогда, если существует такое оснащение, при котором тензоры*

$$\overset{\rho}{h}_{ij}, \underset{\alpha}{\overset{\rho}{\gamma}}_i, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s-m; \quad \rho = s-m+1, \ldots, n-m,$$

в каждой точке вмещены в некоторую r-мерную плоскость. При этом в данной точке многообразия оснащающие векторы $\underset{\alpha}{\xi}$ параллельны плоскости E_s, которая соответствует образующей, проходящей через эту точку.

Пользуясь этой теоремой, можно доказать следующее предложение, которое характеризует геометрическую структуру вырожденных многообразий:

Теорема 2. *Пусть V_m есть s-вырожденное многообразие ранга r и V^0_{m-r} есть образующая, проходящая через точку $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(x^1_0, \ldots, x^m_0)$ многообразия V_m. Проведем через эту точку плоскость E^0_s, которой параллельны все касательные σ к V_m в точках V^0_{m-r}; тогда как сама образующая V^0_{m-r}, так и все σ к V_m в ее точках вмещены в E^0_s или в некоторое $E^0_{s'} \subset E^0_s$ (где $s' < s$).*

2°. Пусть V_m — некоторое оснащенное многообразие m измерений в центроаффинном n-мерном пространстве E_n. Оснащение этого многообразия будем называть центральным, если все оснащающие $(n-m)$-плоскости проходят через центр пространства. В дальнейшем оснащение всегда предполагается центральным. При этом в качестве одного из

* Для V_m, вложенного в аффинное пространство, см. ([2]), гл. I.

** См., например, ([1]) или ([3]).

оснащающих векторов можно взять радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки многообразия; мы будем в дальнейшем предполагать, что $\overset{}{\underset{n-m}{\xi}} = \mathbf{r}$.

В этом случае при переходе от одного оснащения к другому тензоры $\overset{1}{h}_{ij}, \ldots, \overset{n-m-1}{h_{ij}}$ преобразуются следующим образом:

$$\overset{\eta}{h}_{ij} = \overset{\eta}{\underset{\zeta}{\psi}}{}' \overset{\zeta}{h}_{ij} \quad (\eta, \zeta = 1, 2, \ldots, n-m-1),$$

где $\overset{\eta}{\underset{\zeta}{\psi}}$ — функции от точки.

Пусть при каком-нибудь оснащении каждый из тензоров $\overset{\eta}{h}_{ij}$ имеет ранг r, и их области значений совпадают. Из последних соотношений следует, что это имеет место для любого другого оснащения, следовательно, естественно предположить, что число r характеризует геометрическую структуру многообразия V_m независимо от оснащения. Следующая теорема выясняет геометрический смысл числа r.

Теорема 3. *Если дано многообразие V_m с центральным оснащением, вложенное в E_n, причем в качестве последнего оснащающего вектора взят вектор $\mathbf{r}$, и если тензоры $\overset{\eta}{h}_{ij} (\eta = 1, 2, \ldots, n-m-1)$ в каждой точке вмещены в некоторую r-плоскость и не могут быть вмещены в такое же пространство меньшего числа измерений, то V_m есть $(m+1)$-вырожденное многообразие ранга r. Каждая из V_{m-r} образующих вмещена в некоторую плоскость E_{m-r+1}, проходящую через центр пространства E_n. Касательные плоскости σ к V_m вдоль этих образующих вмещены в некоторое $E_{m+1} \supset E_{m-r+1}$, также проходящие через центр пространства.*

В частности, если все $\overset{\eta}{h}_{ij}$ равны нулю, то V_m вмещено в некоторое E_{m+1}, проходящее через центр пространства E_n.

Примером может служить поверхность V_2 в четырехмерном центроаффинном пространстве, у которой тензор $\overset{1}{h}_{ij}$ имеет во всех точках ранг один. Согласно теореме, V_2 есть 3-вырожденное многообразие ранга один, т. е. она образована из однопараметрического семейства плоских кривых, причем плоскость каждой кривой проходит через центр пространства. Касательные плоскости к V_2 вдоль каждой кривой вмещены в некоторое трехмерное пространство, также проходящее через центр объемлющего пространства. Если же тензор $\overset{1}{h}_{ij}$ равен нулю во всех точках рассматриваемой области, то V_2 целиком лежит в некотором трехмерном пространстве.

3°. Можно показать, что образующие V_{m-r}, о которых идет речь в теореме 3, в некотором смысле являются вполне геодезическими подпространствами многообразия V_m. С этой целью предварительно рассмотрим некоторые свойства геодезических линий центрально оснащенных многообразий V_m, вложенных в E_n.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 4. *Пусть дано центрально оснащенное V_m в E_n. Если на V_m имеется плоская кривая L (т. е. кривая, целиком лежащая в некоторой плоскости E_2) и если ее плоскость проходит через центр пространства E_n, то эта кривая является геодезической линией относительно связности, индуцированной на V_m данным оснащением.*

Теорема 5. *Для того чтобы многообразие V_m, вложенное в E_n, было гиперповерхностью некоторого E_{m+1}, проходящего через центр* *пространства E_n, необходимо и достаточно, чтобы при всяком центральном оснащении на V_m любая геодезическая в V_m была плоской кривой и чтобы плоскость этой кривой проходила через центр объемлющего пространства.*

Пользуясь этими теоремами, легко установить следующее свойство образующих тех многообразий, которые удовлетворяют условиям теоремы 3.

Теорема 6. *Если центрально оснащенное многообразие V_m удовлетворяет условиям теоремы 3, то его образующие V_{m-r} являются вполне геодезическими подпространствами многообразия V_m относительно связности, индуцированной на V_m радиусом-вектором.*

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступило 6 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ф. Лаптев, ДАН, 58, № 4, 529 (1947). [2] Л. С. Атанасян, Тр. семинара по вект. и тензорному анализу, вып. 9 (1952). [3] E. Cartan, Bull. Soc. Math. de France, 47, 125 (1919); 48, 132 (1920).