

К. Д. ВОСКРЕСЕНСКИЙ

**К РАСЧЕТУ ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА ШАХТ**

(Представлено академиком М. В. Кирпичевым 5 XI 1952)

В ряде областей техники встречается необходимость расчета нестационарного поля температуры в безграничном массиве, в котором имеется прямой длинный и круглый канал (например, шахта или тоннель). Такая задача при равномерном начальном распределении температуры в массиве и слабом изменении температуры теплоносителя, протекающего по каналу, решена О. А. Кремневым<sup>(1)</sup>. Однако решение найдено не в конечном виде, а в форме сложной квадратуры, аналитическое интегрирование которой затруднительно. Ниже приведено весьма простое решение этой задачи, причем ответ получен в конечной форме.

Поле температуры в массиве для указанных условий описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial t}{\partial r}; \\ t|_{\tau=0; r_0 \leq r \rightarrow \infty} &= t_0; \quad t|_{r > 0; r \rightarrow \infty} = t_0; \\ \left[ \alpha (t_\tau - t) + \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right]_{r=r_0; \tau > 0} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $a$  и  $\lambda$  — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности массива;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи на поверхности канала;  $r_0$  — радиус канала;  $\tau$  — время;  $t_0$  и  $t_\tau$  — температура массива в начальный момент времени и постоянная температура теплоносителя.

Если вместо  $r$  и  $\tau$  ввести в (1) новые аргументы  $x$  и  $T$ :

$$r = r_0 e^{x/r_0}, \quad \tau = T \left( \frac{r_0}{r} \right)^2, \quad (2)$$

то после преобразований получим известную задачу Римана о нагревании полупространства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial T} &= a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \\ t|_{T=0; 0 \leq x \rightarrow \infty} &= t_0; \quad t|_{T > 0; x \rightarrow \infty} = t_0; \\ \left[ \alpha (t_\tau - t) + \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right]_{x=0; \tau > 0} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение задачи (3) имеет следующий вид (2):

$$\frac{t - t_0}{t_\tau - t_0} = \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \exp \left( \frac{\alpha x}{\lambda} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} a\tau \right) \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a\tau} \right), \quad (4)$$

где  $\operatorname{erfc}(\ ) \equiv 1 - \operatorname{erf}(\ )$ , а  $\operatorname{erfc}$  — функция Крампа.

Подставив в (4) значения  $x = r_0 \ln \frac{r}{r_0}$  и  $T = \tau \left( \frac{r}{r_0} \right)^2$  из (2), получим решение рассмотренной в (1) задачи в конечной форме:

$$\Theta = \operatorname{erfc} \left( \frac{\ln R}{2\sqrt{F_0}} \right) - \exp(\operatorname{Bi} \ln R + \operatorname{Bi}^2 F_0) \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{\ln R}{2\sqrt{F_0}} + \operatorname{Bi} \sqrt{F_0} \right), \quad (5)$$

где 
$$\Theta \equiv \frac{t - t_0}{t_T - t_0}; \quad \operatorname{Bi} \equiv \frac{\alpha r_0}{\lambda}; \quad F_0 \equiv \frac{a\tau}{r_0^2}.$$

Сравнивая (5) с найденной в (1) квадратурой, получаем ее выражение в конечном виде:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Y_0(\xi R) \left\{ J_0(\xi) + \frac{\xi}{\operatorname{Bi}} J_1(\xi) \right\} - J_0(\xi R) \left\{ Y_0(\xi) + \frac{\xi}{\operatorname{Bi}} Y_1(\xi) \right\} e^{-\xi^2 F_0}}{\xi \left\{ \left[ J_0(\xi) + \frac{\xi}{\operatorname{Bi}} J_1(\xi) \right]^2 + \left[ Y_0(\xi) + \frac{\xi}{\operatorname{Bi}} Y_1(\xi) \right]^2 \right\}} d\xi =$$

$$= \operatorname{erfc} \left( \frac{\ln R}{2\sqrt{F_0}} \right) - \exp(\operatorname{Bi} \ln R + \operatorname{Bi}^2 F_0) \operatorname{erfc} \left( \frac{\ln R}{2\sqrt{F_0}} + \operatorname{Bi} \sqrt{F_0} \right), \quad (6)$$

где  $\xi$  — вспомогательная переменная.

Аналогично разрешается более общая задача, когда начальное распределение температуры задано в виде осесимметричной функции. В этом случае подстановка (2) приводит к задаче о нагревании полупространства с неравномерным начальным распределением температуры. Решение этой задачи также известно (3).

Поступило  
30 X 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> О. А. Кремнев, ДАН, 85, № 5, 1009 (1952). <sup>2</sup> А. В. Лыков, Теплопроводность нестационарных процессов, 1948. <sup>3</sup> Г. С. Карслоу, Теория теплопроводности, 1947.