Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 1

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. В. ТЯБИН

ДВИЖЕНИЕ ШАРА В ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОЙ ДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЕ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 9 XI 1952)

Метод падения шара в жидкости издавна применяется в вискозиметрии для определения вязкости жидкостей ([1], [2]) и основывается на решении Стокса ([3]) уравнений движения вязкой жидкости. Советскими учеными проведено много исследований по применению метода движения шара для определения реологических констант дисперсных систем ([4–15], [19], [20]). Основным выводом из многочисленных работ по изучению движения шара в дисперсных системах является вывод о том, что уравнение Стокса не подтверждается для движения шара в жидких дисперсных системах.

Целью настоящей работы является получение закона падения шара в вязко-пластической среде (в дальнейшем вязко-пластическая среда и вязко-пластическая жидкость будут называться просто средой и жидкостью) на основании интегрирования установленных мною общих уравнений течения вязко-пластической среды ([16], [17]), которые записываются в форме:

$$\rho (F - W) - \nabla p + \eta_{\text{пл}} \Delta V + \nabla \overline{\Theta} = 0, \quad \nabla V = 0, \tag{1}$$

где ρ — плотность; $\eta_{\text{пл}}$ — пластическая вязкость; F — внешняя сила; W — ускорение; V — скорость; $\overline{\Theta}$ — тензор предельных напряжений; p — давление.

Мы показали ([17]), что для подобия потоков жидкости необходимо равенство двух критериев подобия: $\text{A} = \theta^* / \rho V^2$ и $\text{Re} = V d \rho / \eta_{\text{пл}}$, где θ^* — предельное напряжение сдвига. Позднее я ([18]) нашел, что между критериями А и Re существует аддитивная зависимость и ввел новый критерий $\text{Б} = \text{A} + 1 / \text{Re}$.

$\text{Б} = \dfrac{\theta^* + U \eta_{\text{пл}} / d_0}{\rho U^2}$, где d_0 — диаметр, а U — скорость падения шара.

Применяя приближенный метод решения, будем считать, что силы инерции малы по сравнению с силами вязкости, силами предельного напряжения сдвига и силами давления. При малых силах инерции критерий Б должен иметь большую величину, что будет возможно, если характеристическая скорость движения шара и диаметр шара малы, а предельное напряжение сдвига и пластическая вязкость велики. Это будет случай медленного движения малого шара в вязко-пластической жидкости.

Предположим, что в дисперсной системе прямолинейно и равномерно со скоростью U движется шар радиуса r_0. Внешние силы отсутствуют, инерционными силами можно пренебречь, $W = 0$. Рассматривая задачу в сферических координатах, причем система координат связана с движущимся шаром, получим: $V_r = V_r(r, \theta)$; $V_\theta =$

$= V_0(r, \theta)$; $V_\varphi = 0$; $p = p(r, \theta)$. Все компоненты тензора $\overline{\Theta}$, за исключением $\theta_{r\theta}$, равны нулю, а $\theta_{r\theta} = \theta_{\theta r} = \theta^* = \text{const}$; $\partial\theta_{r\theta} / \partial\theta = 0$.

Уравнения течения жидкой дисперсной системы запишутся:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \eta_{\text{пл}}\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \right.$$
$$\left. - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2} - V_\theta\right) + \frac{\theta^*}{r}\operatorname{ctg}\theta = 0, \tag{2}$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta_{\text{пл}}\left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2 \sin^2\theta}\right) + \frac{3\theta^*}{r} = 0, \tag{3}$$
$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{2V_r}{r} + \frac{V_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r} = 0. \tag{4}$$

Введем в уравнение подстановки:

$$V_r(r, \theta) = f(r)\cos\theta, \quad V_\theta(r, \theta) = -\varphi(r)\sin\theta, \quad p(r, \theta) = \eta_{\text{пл}}\psi(r)\cos\theta; \tag{5}$$

получим:

$$\psi' = f'' + \frac{2}{r}f' - \frac{4}{r^2}(f - \varphi) + \frac{\theta^*}{r\eta_{\text{пл}}\sin\theta}; \tag{6}$$
$$\frac{\psi}{r} = \varphi'' - \frac{2}{r^2}(\varphi - f) + \frac{2}{r}\varphi' + \frac{3\theta^*}{r\eta_{\text{пл}}\sin\theta}; \tag{7}$$
$$f' + \frac{2(f - \varphi)}{r} = 0. \tag{8}$$

Из уравнения (8) определим $\varphi = {}^1/_2 f'r + f$. Из уравнения (7) имеем $\psi = {}^1/_2 f'''r^2 + 3rf'' + 2f' - 3\theta^* / \eta_{\text{пл}}\sin\theta$ и, наконец, из уравнения (6) получаем:

$$f^{\text{IV}}r^3 + 8f'''r^2 + 8f''r - 8f' = \frac{\theta^*}{\eta_{\text{пл}} r \sin\theta}. \tag{9}$$

Общее решение уравнения (9) запишется:

$$f = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2 - \frac{\theta^* r}{8\eta_{\text{пл}}\sin\theta}; \tag{10}$$
$$\varphi = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2 - \frac{3}{16}\frac{\theta^* r}{\eta_{\text{пл}}\sin\theta}; \tag{11}$$
$$\psi = \frac{B}{r^2} + 10Dr - \frac{13}{4}\frac{\theta^*}{\eta_{\text{пл}}\sin\theta}, \tag{12}$$

где A, B, C, D — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Решающее значение имеет правильный выбор граничных условий. Внешние граничные условия будут состоять в том, что среда прилипает к шару, т. е. $V_r(r_0, \theta) = 0$, $V_\theta(r, \theta) = 0$, где r_0 — радиус шара.

Мною ([19]) решена задача о движении шара в вязко-пластической жидкости, считая, что внутренние граничные условия будут теми же, что и для вязкой жидкости. Однако, вследствие свойства пластичности, в дисперсной системе поток не будет распространяться до бесконечности, как это имеет место в вязкой жидкости. В системе вокруг движущегося шара возникает некоторая зона возмущения, представляющая собой тело вращения; на границах поверхности вращения напряжение не в состоянии преодолеть предела текучести среды, и она будет оставаться неподвижной; в зоне возмущения происходит обтекание струями жидкости движущегося шара. Будем предполагать, что поверхностью предельного напряжения сдвига будет поверхность сферы радиуса R_0, концентричной с движущимся шаром. Тогда из внутренних граничных условий имеем, что $V_r(R_0, \theta) = U\cos\theta$, $V_\theta(R_0, \theta) = -U\sin\theta$.

Радиус поверхности предельного напряжения сдвига определяется из условия равенства сил, действующих на эту поверхность. На поверхности возмущения касательное напряжение равно предельному напряжению сдвига, т. е. $\overline{F} = 4\pi R_0^2\theta^*$, где $\overline{F}$ — сила, движущая шар. Если шар движется под влиянием собственного веса, то

$$F = {}^4/_3\pi r_0^3(\gamma_1 - \gamma) = 4\pi R_0^2\theta^*. \tag{13}$$

Радиус зоны возмущения будет:

$$R_0 = r_0\sqrt{\frac{r_0(\gamma_1 - \gamma)}{3\theta^*}}, \tag{14}$$

где $\gamma_1 - \gamma$ — разность удельных весов шара и дисперсной системы.

Из граничных условий в введенных обозначениях получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$f(r_0) = 0, \quad \varphi(r_0) = 0, \quad f(R_0) = U, \quad \varphi(R_0) = U.$$

Решая, определяем постоянные интегрирования: $B = 6r_0UK_1 - \frac{\theta^* r_0^2}{8\eta_{пл}\sin\theta}K_2$; $K_1 = \frac{1-k^5}{s}$; $K_2 = \frac{k(8k - 3 - 3k^6 + 8k^5 - 5k^4 - 5k^2)}{s}$, где $k = \frac{r_0}{R_0}$; $s = 2k^6 - 7k^3 + 9k - 4$; $A = 2r_0^3UK_3 - \frac{\theta^* r_0^4}{24\eta_{пл}\sin\theta}K_4$; $K_3 = \frac{k^3 - 1}{s}$; $K_4 = \frac{(k^3-1)K_2}{s(1-k^5)} - \frac{1-k}{1-k^5}$; $C = -3UK_6 + \frac{\theta^* r_0}{18\eta_{пл}\sin\theta}K_5$; $K_5 = \frac{6 - 5k - k^5}{1-k^5} + K_2\left(3 + \frac{5}{3}\frac{k^3-1}{1-k^5}\right)$; $K_6 = \frac{4 - 9k^5 + 5k^3}{3s}$; $D = \frac{3U}{r_0^2}K_7 + \frac{\theta^*}{16\eta_{пл}\sin\theta r_0}K_8$; $K_7 = \frac{k^3(1-k^2)}{s}$; $K_8 = \frac{k - k^3K_2(1-k^2)}{1-k^5}$. Подставив все полученные значения в уравнения (5), получим решение задачи.

Определим силу сопротивления R, которую оказывает дисперсная система движущемуся шару: $R = \int\limits_0^\pi (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)\, 2\pi r_0^2 \sin\theta\, d\theta$.

Так как среда прилипает к шару, то $V_r = V_0 = 0$; $\partial V_r/\partial\theta = \partial V_\theta/\partial\theta = \partial V_r/\partial r = 0$; $p_{rr} = -p$; $p_{r\theta} = \theta^* + \eta_{пл}(\partial V_\theta/\partial r)_{r=r_0}$.

Подставляя значения p_{rr} и $p_{r\theta}$ в формулу для R и интегрируя, получим силу R в виде:

$$R = 8\pi m r_0 U\eta_{пл} + 4\pi n r_0^2\theta^*, \tag{15}$$

Таблица 1

Значения коэффициентов m и n

k	K_1	K_2	K_3	K_4	K_7	K_9	m	n
$^1/_2$	—2,82	0,525	3,120	0,01	—0,274	0,466	9,03	1,62
$^1/_4$	—0,57	0,185	0,570	—0,71	0,0	0,215	1,71	1,64
$^1/_8$	—0,36	0,126	0,355	—0,93	0,0	0,125	1,08	1,68
$^1/_{10}$	—0,32	0,074	0,322	—0,97	0,0	0,100	0,97	1,69
0	—0,50	0,0	0,250	0,0	0,0	0,0	0,75	1,75

где

$$m = K_3 - K_7 - 2K_1, \quad n = 0{,}147K_2 - 0{,}69K_8 - 0{,}049K_1 + 1{,}73. \quad (16)$$

Вычисленные по формулам (16) значения m и n при различных значениях k приведены в табл. 1.

По полученным значениям построены графики зависимости $m = f(k)$, $n = f(k)$ (рис. 1). Из графиков видно, что значение n почти постоянно и не зависит от отношения r_0 / R_0. Коэффициент m значительно возрастает с увеличением k. С изменением веса движущегося шара при постоянном радиусе r_0 меняется радиус зоны возмущения R_0; при увеличении веса шара m уменьшается и в пределе, при $R_0 \to \infty$, $k \to 0$, $m = {}^3/_4$ (как и для вязкой жидкости).

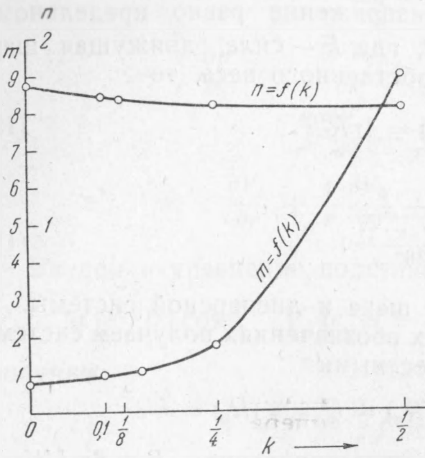

Рис. 1

Естественно, что для определения реологических констант дисперсных систем методом движения шара нужно знать R_0, значение которого зависит от неизвестной величины (15). Поэтому R_0 следует определять визуально. Значения m и n при известном R_0 определяются по графику (рис. 1).

Если падение шара происходит под влиянием собственного веса, то ${}^4/_3\pi r_0^3(\gamma_1 - \gamma) = 8\pi m r_0 U \eta_{пл} + 4\pi n r_0^2 \theta^*$, откуда

$$U = \frac{r_0}{6m\eta_{пл}} \left(r_0 (\gamma_1 - \gamma) - 3n\theta^*\right). \quad (17)$$

Считая, что в уравнении (15) $\theta^* = 3(\gamma_1 - \gamma) k^2 r_0$, получим $U = \frac{(\gamma_1 - \gamma)\, r_0^2}{6m\eta_{пл}} (1 - 9nk^2)$, откуда определится пластическая вязкость: $\eta_{пл} = \frac{(\gamma_1 - \gamma)\, r_0^2}{6mU} (1 - 9nk^2)$; θ^* определится при известном $\eta_{пл}$ из (17).

Поступило
23 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Гатчек, Вязкость жидкостей. [2] Г. Барр, Вискозиметрия, М., 1938. [3] Stokes, Math. and Phys. Papers, 2, 10; 3, 56, Cambridge (1880). [4] Р. И. Шищенко, Б. Д. Бакланов, Азерб. нефт. хоз., № 8—9 (1932). [5] Р. И. Шищенко, Б. Д. Бакланов, Глинистые растворы в бурении, Баку — Москва, 1935. [6] Царевич, Малышев, Нефт. хоз., 31, 1 (1935). [7] И. А. Уткин, М. В. Романов, О. Н. Голубинцев, П. П. Екимов, Промывка скважин и ее теория, 1936. [8] А. К. Скрябин, Колл. журн., 3, 3 (1937). [9] А. К. Скрябин, Тр. Ин-та торфа, в. 17 (1938). [10] А. К. Скрябин, ЖФХ, 9, 6 (1937). [11] Н. Н. Кулаков, Колл. журн., 3, 3 (1937). [12] Н. Н. Кулаков, Совещ. по вязкости жидкостей и коллоидных растворов, 1, 391, 1941. [13] Г. Ш. Израэлит, Л. Н. Рудичка, В. И. Шанников, Механическое испытание резины, эбонита и пластмасс, 1940. [14] Г. Ш. Израэлит, Механическое испытание резины и каучука, 1949. [15] А. Е. Десов, Колл. журн., 13, 5 (1951); Н. В. Тябин, Колл. журн., 13, 1 (1951). [16] Н. В. Тябин, Тр. Казанск. хим.-технолог. ин-та им. С. М. Кирова, 14, 38 (1949). [17] Н. В. Тябин, там же, 14, 38 (1949). [18] Н. В. Тябин, там же, 16 (1951); Колл. журн., 14, 4 (1952). [19] Н. В. Тябин, Тр. Казанск. хим.-технолог. ин-та, 14, 58 (1949). [20] Р. И. Шищенко, Гидравлика глинистых растворов, 1951.