Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. З. КАЦЕНЕЛЕНБАУМ

ВОЛНОВОДЫ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 4 XI 1952)

Рассматривается задача об определении скорости, затухания и конфигурации поля электромагнитных волн в волноводе произвольного сечения, стенки которого являются хорошими проводниками.

Обычно коэффициент затухания определяется из энергетических соображений; при этом получается выражение, неприменимое вблизи и ниже критической частоты. Вопрос об изменении скорости волн и их конфигурации в общем случае вообще не рассматривался; некоторые результаты получены лишь для круглого цилиндра ([1,2]).

Сформулированная задача в общем виде может быть решена последовательным разложением полей в ряд по степеням малой величины, являющейся комплексным волновым сопротивлением материала стенок волновода. Использование такого разложения позволяет, как известно, применить граничное условие М. А. Леонтовича ([3]) и рассматривать только внутреннюю область волновода.

Поля в волноводе выражаются через две функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ и через волновое число h по формулам:

$$\begin{aligned} E_x &= ih\frac{\partial\varphi}{\partial x} - ik\frac{\partial\psi}{\partial y}; & E_y &= ih\frac{\partial\varphi}{\partial y} + ik\frac{\partial\psi}{\partial x}; & E_z &= \alpha^2\varphi; \\ H_x &= ik\frac{\partial\varphi}{\partial y} + ih\frac{\partial\psi}{\partial x}; & H_y &= -ik\frac{\partial\varphi}{\partial x} + ih\frac{\partial\psi}{\partial y}; & H_z &= \alpha^2\psi. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь опущен множитель $e^{ihz+i\omega t}$; $k = \frac{\omega}{c}$, и принято, что ось z совпадает с осью волновода. Функции φ и ψ удовлетворяют одинаковым уравнениям

$$\nabla^2\varphi + \alpha^2\varphi = 0, \quad \nabla^2\psi + \alpha^2\psi = 0. \tag{2}$$

Из них и из соответствующих граничных условий надо найти функции φ и ψ и собственное значение α^2; этим определяются поля (согласно (1)) и $h = h' - ih''$, так как $h^2 = k^2 - \alpha^2$.

Обозначая через $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$ касательный и нормальный к поверхности металла орты, лежащие в плоскости поперечного сечения (так что $s_x = -n_y$; $s_y = n_x$), получим из (1) для касательных компонент полей на поверхности:

$$\begin{aligned} E_s &= ih\frac{\partial\varphi}{\partial s} + ik\frac{\partial\psi}{\partial n}; & E_z &= \alpha^2\varphi; \\ H_s &= -ik\frac{\partial\varphi}{\partial n} + ih\frac{\partial\psi}{\partial s}; & H_z &= \alpha^2\psi. \end{aligned} \tag{3}$$

Граничное условие Леонтовича устанавливает между этими компонентами связь: $E_s = wH_z$; $E_z = -wH_s$, справедливую с точностью до членов первого порядка до w включительно. Здесь $w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, где μ и ε — параметры материала стенок. Если ε мнимо, а μ — вещественно, то $w = \frac{1+i}{2}\mu k d$, где d — толщина скин-слоя.

Таким образом, граничные условия для φ и ψ, при которых надо решать уравнения (2), таковы:

$$ih\frac{\partial\varphi}{\partial s} + ik\frac{\partial\psi}{\partial n} = w\alpha^2\psi; \quad \alpha^2\varphi = w\left(ik\frac{\partial\varphi}{\partial n} - ih\frac{\partial\psi}{\partial s}\right). \tag{4}$$

Для собственного значения можно написать разложение в ряд по степеням w: $\alpha^2 = \alpha_0^2 + w\alpha_1^2 + \ldots$; в такой же ряд, очевидно, разлагается и квадрат волнового числа: $h^2 = h_0^2 - w\alpha_1^2 + \ldots$ Однако старший член этого разложения $h_0^2 = k^2 - \alpha_0^2$ исчезает при критической частоте, т. е. когда $k = \alpha_0$, а вблизи критической частоты он будет сравним со следующим членом. Поэтому для $h = \sqrt{h_0^2 - w\alpha_1^2 + \ldots}$ не существует такого разложения в ряд по степеням w, которое было бы применимо для всех частот, включая окрестность критической частоты. Из (4) следует, что это же имеет место для функций φ и ψ — обе они не разложимы одновременно в ряды по степеням w, которые были бы применимы всюду — и для компонент полей.

Поэтому для того, чтобы применить метод последовательных приближений к (2), (4), нужно использовать искусственный прием, вводя такие вспомогательные функции, чтобы в граничные условия явно входил только квадрат волнового числа.

Для электрических волн нужно ввести $\tilde{\psi} = \psi h$. Функции φ и $\tilde{\psi}$ можно разлагать в ряды:

$$\varphi = \varphi_0 + w\varphi_1 + \ldots; \quad \tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0 + w\tilde{\psi}_1 + \ldots \tag{5}$$

Входя с этим в (2) и (4), получим, по разделении порядков, уравнения

$$\begin{aligned} &\nabla^2\varphi_0 + \alpha_0^2\varphi_0 = 0; \quad &(\text{а}) \qquad &\nabla^2\tilde{\psi}_0 + \alpha_0^2\tilde{\psi}_0 = 0; \quad &(\text{в})\\ &\nabla^2\varphi_1 + \alpha_0^2\varphi_1 = -\alpha_1^2\varphi_0; \quad &(\text{б}) \qquad &\nabla^2\tilde{\psi}_1 + \alpha_0^2\tilde{\psi}_1 = -\alpha_1^2\tilde{\psi}_0 \quad &(\text{д})\end{aligned} \tag{6}$$

граничные условия на контуре поперечного сечения

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = 0; \quad (\text{а}) \qquad &\varphi_1 = \frac{ik}{\alpha_0^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} - \frac{i}{\alpha_0^2}\frac{\partial\tilde{\psi}_0}{\partial s}; \quad (\text{б})\\ &\frac{\partial\tilde{\psi}_0}{\partial n} = 0; \quad (\text{в}) \qquad &\frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial n} = -\frac{h_0^2}{k}\frac{\partial\varphi_1}{\partial s} - \frac{i\alpha_0^2}{k}\tilde{\psi}_0. \quad (\text{д})\end{aligned} \tag{7}$$

Предположим, что вырождения нет, так что собственному значению α_0^2 соответствует только одна функция φ_0, удовлетворяющая (6а) и (7а), и не соответствует ни одна функция $\tilde{\psi}_0$, удовлетворяющая (6в) и (7в). Тогда $\tilde{\psi}_0 = 0$, а φ_0, α_0^2 и h_0^2 соответствуют какой-либо электрической волне в идеальном волноводе.

Величина α_1^2 находится из условия разрешимости уравнения (6б) при граничном условии (7б), в котором еще следует положить $\tilde{\psi}^0 = 0$. Умножая (6а) на φ_1, (6б) — на φ_0, вычитая и интегрируя по всему поперечному сечению, получим по формуле Грина, учитывая граничные условия для φ_0 и φ_1:

$$\alpha^2_1 = \frac{ik}{\alpha_0^2} \oint \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right)^2 ds, \tag{8}$$

где интеграл взят по контуру поперечного сечения. Здесь принята нормировка $\int \varphi^2 \, dS = 1$.

Обозначив теперь

$$M = \frac{\mu k^2 d}{2\alpha_0^2} \oint \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right)^2 ds, \tag{9}$$

мы при $w = \frac{1+i}{2} \mu k d$ получим

$$h^2 = h_0^2 + M(1-i) + O(|w|^2); \quad h_0^2 = k^2 - \alpha_0^2 \tag{10}$$

(ср. ([1]), § 11, 2). Разложение (10) справедливо при всех частотах.

При $|h_0| \gg M$ можно написать

$$h = h_0 + \frac{1}{2} \frac{M}{h_0} (1-i) + O(|w|^2). \tag{11}$$

При $k > \alpha_0$ получаем из (11) для коэффициента поглощения

$$h'' = \frac{M}{2h_0} \tag{12}$$

— выражение, которое может быть получено обычным способом из теоремы Умова — Пойтинга. Фазовая скорость v связана, согласно (11), с фазовой скоростью в идеальном волноводе v_0 соотношением

$$v = v_0 \left(1 - \frac{h''}{h^0}\right). \tag{13}$$

При $k < \alpha_0$ из (10) также можно получить общее выражение для комплексного волнового числа

$$h = -i\left(|h_0| - \frac{M}{2|h_0|}\right) + \frac{M}{2|h_0|}. \tag{14}$$

Переход от $k > \alpha_0$ к $k < \alpha_0$ описывается формулой (10), позволяющей дать явное выражение для h' и h'' при любом соотношении между $k^2 - \alpha_0^2$ и M*. Например, при $k = \alpha_0$ $h = \sqrt{M}\,(1{,}10 - i\,0{,}46)$. Вообще, волновое число h, которое вдали от критической частоты отличается от h_0 на члены порядка $k|w|$, в непосредственной близости к критической частоте будет порядка $k|w|^{1/2}$.

Для определения полей следует либо находить φ_1 и $\tilde{\psi}_1$ из уравнений (6б, д) при граничных условиях (7б, д), в которых еще нужно положить $\tilde{\psi}_0 = 0$**, либо — что приведет к тому же результату — решать (2) с граничными условиями

---

* h' и h'' находятся из уравнений: $h'^2 - h''^2 = h_0^2 + M$; $2h'h'' = M$.

** Можно, например, получить явное выражение для φ_1 в виде ряда по полной системе мембранных функций φ_m, и для $\tilde{\psi}_1$ в виде ряда по полной системе функций ψ_m, где φ_m и ψ_m суть собственные функции уравнений (2) для граничных условий (7а) и (7в), соответственно.

$$\varphi = w \frac{ik}{\alpha_0^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}; \quad h \frac{\partial \psi}{\partial n} = -w \frac{ih_0^2}{\alpha_0^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial s\, \partial n} \tag{15}$$

и в полученных решениях для φ и $h\psi$ сохранить лишь первые два члена разложения по w.

Функция φ при всех частотах отличается от φ_0 на член порядка $|w|$ (относительно φ_0); функция ψ вдали от критической частоты будет порядка $|w|$, а вблизи критической частоты — более высокого порядка (так как первый член разложения вспомогательной функции $\widetilde{\psi}$ в ряд по w, согласно (7д) или (15), пропорционален $k^2 - \alpha^2$). Например, при $k = \alpha_0$ $\psi = \varphi_0 O(|w|^{3/2})$. Формулы (1) позволяют теперь проследить влияние неидеальности стенок на различные компоненты поля. Отметим здесь лишь, что при частотах, заметно отличных от критической, $H_z = E_z O(|w|)$, а при критической частоте $H_z = E_z O(|w|^{3/2})$.

При рассмотрении магнитных волн следует разлагать в ряд по степеням w функцию ψ и вспомогательную функцию $\widetilde{\varphi} = \varphi h$. Предполагая вновь, что вырождения нет, получим из (4) в понятных обозначениях $\widetilde{\varphi}_0 = 0$, а граничные условия, после разделения порядков, будут

$$\widetilde{\varphi}_1 = -i \frac{h_0^2}{\alpha_0^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial s}; \quad \text{(а)} \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = -i \frac{1}{k\alpha_0^2} \left\{ \alpha_0^4 \psi_0 - h_0^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial s^2} \right\}. \quad \text{(б)} \tag{16}$$

Дифференциальные уравнения будут те же, что и для электрических волн (6), только в них надо будет положить $\widetilde{\varphi}_0 = 0$. Величина $\alpha^2{}_1$ определяется из условия разрешимости уравнения (6 д) при граничном условии (16 б). Применяя тот же метод, что и при выводе (8), и интегрируя по частям в контурном интеграле, получим

$$\alpha^2{}_1 = \frac{i}{k\alpha_0^2} \left\{ \alpha_0^4 \oint \psi_0^2\, ds + h_0^2 \oint \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial s} \right)^2 ds \right\}. \tag{17}$$

В результате для комплексного волнового числа, скорости и затухания при разных частотах получаются те же формулы (10)—(14), что и для электрических волн, а величина M будет:

$$M = \frac{\mu d}{2\alpha_0^2} \left\{ \alpha_0^4 \oint \psi_0^2\, ds + h_0^2 \oint \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 ds \right\}. \tag{18}$$

Старший член в φ пропорционален $\frac{h_0^2}{h} w$, а при критической частоте эта функция будет порядка не ниже $|w|^{3/2}$ относительно ψ_0; ψ при всех частотах отличается от ψ_0 на члены порядка $|w|$. Функции $\widetilde{\varphi}_1$ и ψ_1 легко найти.

Все расчеты легко обобщаются на случай, когда свойства материала стенок зависят от координаты s.

Поступило
28 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Введенский, А. Аренберг, Радиоволноводы, 1946. [2] Я. Л. Альперт, ЖТФ, **10**, № 16, 1358 (1940). [3] Исследования по распространению радиоволн, II, 1948.