

П. К. СУЕТИН

МНОГОЧЛЕНЫ ФАБЕРА ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ  
С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 XI 1952)

Пусть  $G$  — односвязная область с границей  $\Gamma$  — спрямляемой жордановой кривой. Обозначим через  $w = \Phi(z)$  функцию, отображающую внешность кривой  $\Gamma$  на внешность единичного круга при условиях  $\Phi(\infty) = \infty$  и  $\Phi'(\infty) > 0$ , и пусть  $z = \Psi(w)$  — обратная функция. Тогда многочленом Фабера  $n$ -й степени  $\Phi_n(z)$  для  $G$  называется совокупность членов с неотрицательными степенями  $z$  в лорановском разложении функции  $[\Phi(z)]^n$  в окрестности точки  $z = \infty$ .

Возникает вопрос об условиях, при которых функция  $f(z)$ , аналитическая в  $G$ , разлагалась бы в ряд по многочленам Фабера, сходящийся равномерно внутри  $G$ .

Г. Фабер <sup>(1)</sup> показал, что если  $\Gamma$  — правильная аналитическая кривая, то всякая функция  $f(z)$ , аналитическая в  $G$ , представима своим рядом Фабера. В другом случае <sup>(2)</sup> для разложения  $f(z)$  в ряд Фабера достаточно, чтобы  $G$  была односвязной областью со связным дополнением, а  $f(z)$  — аналитической в замкнутой области  $\bar{G}$ . Этот случай можно рассматривать как противоположный первому, ибо в первом максимум требований предъявляется к границе (она аналитическая), а от поведения функции  $f(z)$  на  $\Gamma$  ничего не требуется; во втором же случае от границы  $\Gamma$  ничего не требуется, но зато функция  $f(z)$  в граничных точках должна быть аналитической, т. е. максимально хорошей. Возникает вопрос о нахождении условий на границу  $\Gamma$  и на функцию  $f(z)$ , достаточных для разложения  $f(z)$  в ряд по многочленам Фабера и промежуточных между двумя крайними случаями, указанными Фабером. Два случая таких условий были указаны А. И. Маркушевичем <sup>(3)</sup>. В одном из них  $\Gamma$  — спрямляемая жорданова кривая, а  $f(z)$  — аналитическая в  $G$ , непрерывная в  $G$  и имеет ограниченную вариацию на  $\Gamma$  (а значит, и абсолютно непрерывна на  $\Gamma$ ); в другом случае  $\Gamma$  обладает касательной, угол наклона которой  $\alpha(s)$  к действительной оси, рассматриваемый как функция дуги  $s$ , удовлетворяет условию  $|\alpha(s'') - \alpha(s')| < c |s'' - s'|^\beta$  ( $0 < \beta \leq 1$ ), но зато  $f(z)$  принадлежит только классу  $E_1$  в  $G$  и произведение  $|f(\zeta)| \ln^+ |f(\zeta)|$  суммируемо на  $\Gamma$ .

Укажем еще несколько таких промежуточных условий, причем гладкость кривой  $\Gamma$  будем характеризовать поведением на  $|w| = 1$  функции  $\Psi'(w)$  и ее производных.

Прежде всего отметим очевидную зависимость многочленов Фабера от степени гладкости границы области. Из формулы <sup>(4)</sup>

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(\zeta)^n d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} w^n \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} w^n F(w, z) dw \quad (1)$$

следует, что  $\Phi_n(z)$  является коэффициентом при  $w^{-n-1}$  разложения функции  $F(w, z)$  в окрестности точки  $w = \infty$  при фиксированном  $z \in G$ , т. е.

$$F(w, z) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi'(w) - z} = \sum_0^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что при фиксированном  $z \in G$  скорость стремления чисел  $\{\Phi_n(z)\}$  к нулю зависит от свойств функции  $F(w, z)$  и, следовательно, от степени гладкости кривой  $\Gamma$ . Если  $\Gamma$  — спрямляемая жорданова кривая, то  $\Psi'(w) \in H_1$  и, значит,  $F(w, z)$  тоже принадлежит классу  $H_1$  вне единичного круга, и, следовательно, по теореме Харди — Литтльвуда (5), последовательность  $\{\Phi_n(z)\}$  стремится к нулю так быстро, что сходится абсолютно ряд

$$\sum_1^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{n}. \quad (3)$$

Если же  $\Gamma$  — гладкая кривая и такова, что  $\Psi^{(p+2)}(w) \in H_1$ , то функция  $F(w, z)$  тоже  $p+1$  раз дифференцируема на  $|w|=1$  и  $F^{(p+1)}(w, z) \in H_1$ . Интегрируя по частям интеграл в (1)  $p+1$  раз, найдем

$$\Phi_n(z) = \frac{(-1)^{p+1}}{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} w^{n+p+1} F^{(p+1)}(w, z) d\omega, \quad (4)$$

откуда, как и в (3), придем к абсолютной сходимости ряда

$$\sum_1^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+p) \Phi_n(z), \quad (5)$$

причем нетрудно убедиться в том, что ряды (3) и (5) сходятся равномерно внутри  $G$ . Если же  $\Gamma$  — правильная аналитическая кривая, то  $\{\Phi_n(z)\}$  стремится к нулю со скоростью прогрессии (1).

**Теорема 1.** Если  $\Gamma$  такова, что  $\Psi^{(p+2)}(w) \in H_1$ , а у  $f(z)$  примитивная  $p$ -го порядка  $f_p(z)$  принадлежит классу  $E_1$  в  $G$ , то  $f(z)$  представима своим рядом Фабера, сходящимся равномерно внутри  $G$  и абсолютно.

В частности, теорема справедлива, если  $f(z)$  аналитическая в  $\bar{G}$ , кроме конечного числа полюсов, расположенных на  $\Gamma$  и порядка не старше  $p$ .

**Доказательство.** В силу условий теоремы  $f(z)$  представима в виде

$$f(z) = f_p^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_p(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}. \quad (6)$$

Далее, равенство, полученное из (2) заменой  $\zeta = \Psi(w)$ , продифференцируем  $p$  раз по  $\zeta$ ; будем иметь:

$$\frac{p!}{(\zeta - z)^{p+1}} = \sum_0^{\infty} \Phi_n(z) [B_1^{(n)}(\zeta) + B_2^{(n)}(\zeta) + \dots + B_{p+1}^{(n)}(\zeta)], \quad (7)$$

где

$$B_k^{(n)}(\zeta) = O(n^{k-1}) \text{ при } \zeta \in \Gamma, \quad B_{p+1}^{(n)}(\zeta) = (n+1)\dots(n+p) \frac{\Psi'(\zeta)^{p+1}}{\Phi(\zeta)^{n+p+1}}. \quad (8)$$

Полученный ряд сходится абсолютно при фиксированном  $z \in G$  и любом  $\zeta \in \Gamma$ , ибо множитель при  $\Phi_n(z)$  по модулю не превосходит  $n^p C$  и ряд (5) сходится абсолютно. Умножая (7) на  $\frac{1}{2\pi i} f_p(\zeta)$  и интегрируя почленно по  $\Gamma$ , придем при помощи (6) к сходимости ряда Фабера в фиксированной, но произвольной точке  $z \in G$ . Для того чтобы доказать равномерную сходимость внутри  $G$ , достаточно, согласно теореме Витали (<sup>4</sup>), доказать равномерную ограниченность внутри  $G$  частичных сумм этого ряда. А для этого представим рассматриваемый ряд, используя (7), в виде суммы  $p+1$  рядов. Равномерная ограниченность внутри  $G$  частичных сумм первых  $p$  рядов очевидна, ибо  $B_k^{(n)}(\zeta) = O(n^{k-1})$  и равномерно внутри  $G$   $\Phi_n(z) = O(n^{-p-1})$ . Остается последний ряд, и достаточно доказать, что при  $z \in F \subset G$ ,  $\zeta \in \Gamma$  и при любом  $N$  всегда будет

$$|s_N(z, \zeta)| = \left| \sum_0^N \Phi_n(z) B_{p+1}^{(n)}(\zeta) \right| \leq M(F).$$

Используя (4) и (8), эту сумму можно представить в виде

$$s_N(z, \zeta) = \Phi'(\zeta)^{p+1} \frac{(-1)^{p+1}}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \left[ \sum_0^N \frac{\omega^{n+p+1}}{n+p+1} \frac{1}{\Phi(\zeta)^{n+p+1}} \right] F^{(p+1)}(\omega, z) d\omega.$$

Далее, замечая, что  $\Phi(\zeta) = e^{i\theta_0}$  и добавляя под интеграл сумму отрицательных степеней  $\omega$ , что не изменит величины интеграла, ибо  $F^{(p+1)}(\omega, z) \in H_1$  вне единичного круга, получим

$$s_N(z, \zeta) = \Phi'(\zeta)^{p+1} \frac{(-1)^{p+1}}{\pi} \int_{|\omega|=1} \left[ \sum_0^N \frac{\sin(n+p+1)(\theta - \theta_0)}{n+p+1} \right] F^{(p+1)}(\omega, z) d\omega.$$

Но ведь  $\left| \sum_1^k \frac{\sin n\alpha}{n} \right| \leq 2\sqrt{\pi}$  при любом  $k$  и  $\alpha$ , и, значит,

$$|s_N(z, \zeta)| \leq |\Phi'(\zeta)|^{p+1} C \int_{|\omega|=1} |F^{(p+1)}(\omega, z)| |d\omega|.$$

Так как последний интеграл равномерно внутри  $G$  ограничен, то теорема 1 доказана.

Из доказательства видно, что вместо обычной формулы для коэффициентов Фабера (<sup>3</sup>) функции  $f(z)$  будем иметь полученную из нее интегрированием по частям  $p$  раз и содержащую  $f_p(\zeta)$  и производные от  $\Phi(\zeta)$  до  $(p+1)$ -го порядка. Относительно порядка коэффициентов можно утверждать лишь  $a_n = O(n^p)$ , откуда вместе с абсолютной сходимостью ряда (5) придем к абсолютной сходимости рассматриваемого ряда внутри  $G$ .

Эта теорема указывает постепенный переход требований от кривой  $\Gamma$  на функцию  $f(z)$  при понижении  $p$ . При  $p=0$  теорема накладывает по сравнению с другими  $p>0$  максимальные требования на  $f(z)$ :  $f(z) \in E_1$  и минимальные на  $\Gamma$ :  $\Psi''(\omega) \in H_1$ . При  $p=-1$  теорема обратится в случай, рассмотренный А. И. Маркушевичем: ведь тогда  $\Psi''(\omega) \in H_1$  и вместо примитивной классу  $E_1$  должна принадлежать производная  $f'(z)$ .

Теорема 1 остается справедливой, если от функции  $f_p(z)$  требовать не принадлежности классу  $E_1$  в  $G$ , а просто представимости интегралом типа Коши.

Теорема 2. Пусть  $\Gamma$  такова, что  $\Psi'(w) \in H_r$  и  $f(z) \in E_r$  (где  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ ). Если

$$\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^{r'} |\Phi'(\zeta)| |d\zeta| = \int_{|w|=1} |f[\Psi(w)]|^{r'} |dw| < \infty, \quad (9)$$

то функция  $f(z)$  представима своим рядом Фабера, сходящимся равномерно внутри  $G$ .

В самом деле, учитывая формулу коэффициентов (3), найдем, что при  $z \in F \subset G$

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_0^N a_n \Phi_n(z) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} \left\{ f[\Psi(w)] - \sum_{-N}^N a_n w^n \right\} dw \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi r(F, \Gamma)} \left[ \int_0^{2\pi} |\Psi'(e^{i\theta})| |f_1(\theta) - s_N^{(1)}(\theta)| d\theta + \int_0^{2\pi} |\Psi'(e^{i\theta})| |f_2(\theta) - s_N^{(2)}(\theta)| d\theta \right], \end{aligned}$$

где  $f[\Psi(w)] = f_1(\theta) + if_2(\theta)$ , а  $\sum_{-N}^N a_n w^n = s_N^{(1)}(\theta) + is_N^{(2)}(\theta)$  и  $s_N^{(1)}(\theta)$ ,  $s_N^{(2)}(\theta)$  — частичные суммы рядов Фурье функций  $f_1(\theta)$  и  $f_2(\theta)$ . Так как эти две функции суммируемы со степенью  $r'$  (ибо выполнено условие (9)), то их ряды сходятся в среднем с той же степенью, и поэтому, применяя неравенство Гельдера к последним интегралам, придем к утверждению теоремы.

Теорема 3. Если  $\Gamma$  такова, что  $\Psi'(w) \in H_1$  и, кроме того,

$$\int_{|w|=1} |\Psi'(w)| \ln^+ |\Psi'(w)| |dw| < \infty, \quad (10)$$

то всякая функция  $f(z)$ , аналитическая в  $G$  и ограниченная там по модулю, представима своим рядом Фабера, сходящимся равномерно внутри  $G$ .

В самом деле, из неравенства

$$\left| f(z) - \sum_0^N a_n \Phi_n(z) \right| \leq \frac{C}{2\pi} \int_{|w|=1} \left| \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} - \sum_0^N \frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}} \right| |dw|$$

следует сходимость в произвольной точке  $z \in G$ , ибо условие (10) обеспечивает сходимость в среднем ряда (2). Остается доказать равномерную ограниченность внутри  $G$  частичных сумм этого ряда, а в этом нетрудно убедиться при помощи неравенства Юнга (5).

Так же как в первой теореме, в теоремах 2 и 3 от функции  $f(z)$  достаточно потребовать представимости интегралом типа Коши, функция распределения которого в одном случае удовлетворяет условию (9), а в другом ограничена.

Теоремы 2 и 3 устанавливают условия, промежуточные между случаями  $p=0$  и  $p=-1$  теоремы 1. Аналогично доказываются теоремы, дающие условия, промежуточные между случаями  $p$  и  $(p-1)$  теоремы 1, только вместо  $\Psi'(w)$  и  $f(z)$  в них будут фигурировать  $\Psi^{(p+1)}(w)$  и  $f_p(z)$ .

Поступило  
17 X 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> G. Faber, Math. Ann., 57, 389 (1903); 64, 116 (1907). <sup>2</sup> G. Faber, J. f. reine u. angew. Math., 150, 79 (1920). <sup>3</sup> А. И. Маркушевич, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, № 1, 49 (1944). <sup>4</sup> А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 1950. <sup>5</sup> А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939.