Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

К. СИТНИКОВ

ПРИМЕР ДВУМЕРНОГО МНОЖЕСТВА В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ДОПУСКАЮЩЕГО СКОЛЬ УГОДНО МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В ОДНОМЕРНЫЙ ПОЛИЭДР, И НЕКОТОРАЯ НОВАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАЗМЕРНОСТИ МНОЖЕСТВ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 XI 1952)

1. Первым результатом этой заметки является построение двумерного множества A, лежащего в трехмерном евклидовом пространстве и обладающего следующим свойством: при всяком $\varepsilon > 0$ существует ε-сдвиг множества A в одномерный полиэдр P (т. е. непрерывное отображение f множества A в P, при котором $\rho(x, fx) < \varepsilon$ для любой точки $x \in A$); следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ существует и ε-покрытие* множества A, имеющее кратность 2. При этом множество A есть множество типа G_δ.

2. Таким образом решается задача, поставленная П. С. Александровым в 1935 г. на Московской международной топологической конференции (1).

В связи с этим естественно напомнить следующее. Обычная урысоновская размерность метризуемого пространства A со счетной базой равняется, как известно, наименьшему такому числу r, что в любое покрытие ω множества A можно вписать покрытие кратности $r+1$, или, что то же, наименьшему такому r, что для всякого ω существует ω-отображение множества A в r-мерный полиэдр. Гуревичем было доказано (2), что для $\dim A = r$ необходимо и достаточно, чтобы в о в с я к о й вполне ограниченной метрике пространства A при всяком $\varepsilon > 0$ существовало ε-покрытие кратности $r+1$ и чтобы при некотором выборе метрики A и достаточно малом ε не существовало ε-покрытия меньшей кратности. Этому условию эквивалентно условие, чтобы при всякой вполне ограниченной метрике пространства A и всяком $\varepsilon > 0$ существовало ε-отображение** пространства A в r-мерный полиэдр и чтобы при достаточно малом ε не существовало ε-отображения в полиэдр меньшей размерности.

---

* Рассматриваем лишь покрытия, состоящие из открытых множеств. Если ω есть покрытие какого-нибудь множества X, то под ω-отображением множества X в какое-нибудь множество Y понимается такое отображение f, при котором каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность Oy, прообраз $f^{-1}Oy$ которой лежит в некотором элементе покрытия ω.

** Под ε-отображением метрического пространства X в пространство Y понимается такое непрерывное отображение, при котором каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность, прообраз которой по диаметру $< \varepsilon$.

Очевидно, что множество типа F_σ не может быть сколь угодно малым сдвигом преобразовано в полиэдр меньшей размерности; поэтому построенный мною пример множества типа G_δ, допускающего такое преобразование, является с точки зрения дескриптивной теории множеств простейшим возможным. Заметим, наконец, что в работе Г. С. Чогошвили (³) утверждается, что для всякого лежащего в n-мерном евклидовом пространстве R^n множества E существует такое $\varepsilon > 0$, что множество E не может быть посредством ε-сдвига переведено во множество низшей размерности. Из сказанного выше следует, что утверждение Чогошвили неверно даже при $n = 3$.

3. Переходим к построению множества A, обладающего указанными в § 1 свойствами.

Возьмем в трехмерном пространстве R^3 систему прямоугольных координат и рассмотрим для $k = 1, 2, \ldots$ кубильяж с ребром длины $1/k$, т. е. совокупность кубов, на которые пространство R^3 разбивается плоскостями $x = p/k$, $y = q/k$, $z = r/k$, где p, q, r пробегают независимо друг от друга все целые значения. Сумму всех ребер и вершин этих кубов обозначим через K_k. Положим теперь $Q_1 = K_1$ и сдвинем бесконечный одномерный полиэдр K_2 (как твердое тело) так, чтобы он стал в общее положение к Q_1, т. е. чтобы сдвинутый полиэдр K_2 — обозначим его через Q_2 — не имел общих точек с Q_1. Точно так же сдвинем полиэдр K_3 как твердое тело в полиэдр Q_3, не пересекающийся с $Q_1 \cup Q_2$, и т. д. Получим последовательность одномерных полиэдров $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots$, попарно не имеющих общих точек, причем сумма этих полиэдров есть всюду плотное в пространстве R^3 множество типа F_σ, которое обозначим через B.

Дополнительное множество $A = R^3 \setminus B$ есть множество типа G_δ, обладающее следующими свойствами:

1° Оно имеет размерность 2.

2° Оно может быть переведено сколь угодно малым сдвигом в (бесконечный) одномерный полиэдр.

Второе свойство следует из того, что при всяком k имеем $A \subset R^3 \setminus Q_k$ и что $R^3 \setminus Q_k$ переходит в одномерный бесконечный полиэдр Q_k^* посредством $\frac{1}{k}$-сдвига (полиэдр Q_k^* получается, если сдвинуть Q_k на вектор, идущий из какой-либо вершины полиэдра Q_k в центр куба, инцидентного этой вершине).

Свойство 1° вытекает из следующего предложения, представляющего и некоторый самостоятельный интерес:

Теорема 1. *Пусть в n-мерном пространстве R^n дано счетное множество попарно не пересекающихся непустых замкнутых множеств $D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots$, сумма которых есть всюду плотное множество D. Тогда дополнительное множество $C = R^n \setminus D$ имеет размерность $n - 1$.*

В самом деле, так как D всюду плотно, то $\dim C \leqslant n - 1$. Если бы было $\dim C \leqslant n - 2$, то, в силу основной теоремы моей работы (⁴), всякие две точки d_1, d_2 в D принадлежали бы лежащему в D континууму $\overline{\overline{d_1 d_2}}$. В самом деле, пару точек d_1, d_2 можно рассматривать как нульмерный цикл z^0, а по упомянутой теореме $z^0 \sim 0$ в D; носитель этой гомологии и есть континуум $\overline{\overline{d_1 d_2}}$. Взяв, например, $d_1 \in D_1$, $d_2 \in D_2$, мы представим континуум $\overline{\overline{d_1 d_2}}$ в виде суммы попарно непересекающихся замкнутых множеств $\overline{\overline{d_1 d_2}} \cap D_1$, $\overline{\overline{d_1 d_2}} \cap D_2, \ldots, \overline{\overline{d_1 d_2}} \cap D_k, \ldots$, из которых по крайней мере два непусты и общее число которых счетно. Но это противоречит известной теореме Серпинского (см., например, (⁵), стр. 177). Теорема 1 доказана.

Взяв пересечение построенного выше множества A, например, с единичным кубом пространства R^3, получим ограниченное множество размерности 2, допускающее сколь угодно малые сдвиги в конечные одномерные полиэдры, чем поставленная цель достигнута.

4. Аналогичное построение, проведенное в n-мерном пространстве, приводит к такому $(n-1)$-мерному множеству, которое допускает сколь угодно малые сдвиги в полиэдры размерности $[n/2]$. Вопрос о возможности дальнейшего понижения размерности остается открытым.

5. Имеет место следующее предложение:

Теорема 2. *Если r-мерное множество A, лежащее в n-мерном пространстве R^n, имеет замыкание $\overline{A}$ размерности r, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ не существует никакого ε-сдвига множества A в полиэдр размерности $< r$.*

Для доказательства этой теоремы заметим, что при только что сформулированных предположениях относительно множества A построение §§ 6, 7 моей работы ([4]) можно повести так, что оно приведет к циклу z^{n-r-1}, лежащему в $U^n \setminus \overline{A}$ (где U^n — некоторый открытый шар в R^n) и не гомологичному нулю в $U^n \setminus A$. Этот цикл можно, кроме того, предположить полиэдральным.

Пусть теперь множество A можно сколь угодно малым сдвигом перевести в полиэдр размерности $< r$. Рассматривая этот сдвиг лишь на $A \cap \overline{U}_1^n$, где $\overline{U}_1^n$ — замкнутый шар, лежащий в U^n, заставим сдвиг затухать в $U^n \setminus U_1^n$ при приближении к границе шара U^n. Цикл z^{n-r-1} будет гомологичен нулю в $U^n \setminus A_1$, где A_1 есть результат полученной затухающей деформации множества A в U^n. Но это противоречит усиленной деформационной теореме, доказанной в моей работе ([6]). Теорема 2 этим доказана. Из нее следует, что для всякого r-мерного метризуемого пространства E со счетной базой существует такая метрика, в которой E при достаточно малом ε не допускает ε-покрытий кратности $< r+1$; за эту метрику можно принять метрику любого r-мерного компакта, содержащего топологический образ данного пространства E. Таким образом, из теоремы 2 вытекает упомянутая выше теорема Гуревича.

Интересно было бы найти элементарные доказательства теорем 1 и 2 настоящей заметки.

6. Новая характеризация размерности незамкнутых множеств евклидовых пространств дается следующим предложением:

Теорема 3. *Пусть в евклидовом пространстве R^n дано произвольное множество A размерности r. Тогда, каково бы ни было открытое множество $U \subset R^n$, множество $U \cap A$ можно внутри U продеформировать в бесконечный r-мерный полиэдр так, что эта деформация затухает при приближении к границе* множества U. С другой стороны, существует такое открытое $U_0 \subset R^n$ (за которое можно даже взять некоторый открытый шар), что множество $U_0 \cap A$ нельзя внутри U_0 продеформировать в полиэдр размерности $< r$ таким образом, чтобы эта деформация затухала при приближении к границе U_0.*

Первым утверждением мы пользовались при доказательстве общей теоремы о препятствиях ([4]). Второе утверждение можно вывести из общей теоремы о препятствиях и усиленной деформационной теоремы ([6]), взяв в качестве множества U_0 тот шар, в котором A является препятствием (т. е. который удовлетворяет тому условию, что в $U_0 \setminus A$ лежит цикл z^{n-r-1}, не ограничивающий в $U_0 \setminus A$). Однако,

* Это значит, что каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и точка a границы U, существует такое $\delta > 0$, что все точки множества $U \cap A$, отстоящие от точки a на расстояние $< \delta$, сдвигаются во все время деформации меньше, чем на ε.

если от открытого множества U_0 не требовать, чтобы оно было непременно шаром, то можно доказать второе утверждение теоремы 3 гораздо более элементарным путем, именно, следующим.

Лемма. *Существует непрерывное отображение f некоторой окрестности r-мерного множества $A \subset R^n$ на r-мерный замкнутый симплекс $\overline{T}^r$, существенное на множестве A.*

Для доказательства леммы берем такое конечное открытое покрытие ω_1 множества A, что всякое барицентрическое отображение множества A в нерв ω_1 существенно покрывает некоторый r-мерный симплекс нерва ω_1 (таким покрытием будет всякое покрытие, в которое нельзя вписать покрытие кратности $< r+1$). Для каждого элемента покрытия ω_1 выбираем высекающее его открытое в R^n множество так, чтобы получилось покрытие ω, подобное покрытию ω_1. Сумма элементов покрытия ω есть окрестность множества A. Барицентрическое отображение этой окрестности на нерв ω, индуцируя барицентрическое же отображение множества A на нерв ω_1, существенно покрывает точками множества A некоторый r-мерный симплекс нерва, чем лемма доказана.

Пусть f есть, в соответствии с леммой, отображение окрестности OA множества A на симплекс $\overline{T}^r$, существенное на множестве A. Обозначим через U_0 прообраз при отображении f внутренности симплекса $\overline{T}^r$. Открытое в R^n множество U_0 и есть искомое. В противном случае существовала бы затухающая при приближении к границе U_0 деформация множества $U_0 \cap A$ внутри U в $(r-1)$-мерный полиэдр P. Тогда этой деформации будет соответствовать и допустимая (т. е. тождественная на прообразе границы $\overline{T}^r$) деформация отображения f, результатом которой явилось бы отображение f_1, при котором прообраз открытого симплекса T^r есть $(r-1)$-мерный полиэдр P. Аппроксимируя это отображение симплициальным, получим отображение, при котором образ множества A не будет покрывать весь симплекс T^r, что противоречит существенности первоначального отображения.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
4 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Александров, Матем. сборн., 1, 43, в. 5, 620 (1936). [2] W. Hurewicz, Monatsh. Math. u. Phys., 37, 207 (1930). [3] G. Chogoshvili, Comp. math., 5, 292 (1938). [4] К. Ситников, ДАН, 83, № 1, 31 (1952). [5] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937. [6] К. Ситников, ДАН, 82, № 6, 845 (1952).