

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

**ВТОРАЯ ЗАМЕТКА О ПРОДОЛЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 X 1952)

В этой заметке развиваются в одном направлении результаты, опубликованные в (1, 2). Сначала условимся в обозначениях.

Пусть в пространстве R_n вещественных переменных x_1, \dots, x_n задана область G . Обозначим через G_η область, принадлежащую к G и состоящую из точек, расстояние которых до границы G больше η ($\eta > 0$). При $G = R_n$ полагаем $G_\eta = R_n$.

Пусть $r > 0$. Будем говорить, что функция $f = f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит к классу $H_{p, x_1}^{(r)}(G; M)$, если она определена на G , интегрируема в p -й степени на G вместе со своими частными производными $\partial^k f / \partial x_1^k$ ($k = 1, \dots, r$), где $r = \bar{r} + \alpha$ (\bar{r} целое, $0 < \alpha \leq 1$), и, кроме того,

$$\left(\int_{G_\eta} \dots \int \left| f_{x_1}^{(r)}(x_1 + h, x_2, \dots) - f_{x_1}^{(r)}(x_1, x_2, \dots) \right|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p} < M |h|^\alpha$$

при $\alpha < 1$; (1)

$$\left(\int_{G_\eta} \dots \int \left| f_{x_1}^{(r)}(x_1 + h, x_2, \dots) - 2f_{x_1}^{(r)}(x_1, x_2, \dots) + f_{x_1}^{(r)}(x_1 - h, x_2, \dots) \right|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p} \leq M |h| \text{ при } \alpha = 1, \quad (2)$$

каково бы ни было h , удовлетворяющее неравенству $|h| < \eta$, где η — произвольное положительное и $1 \leq p \leq \infty$.

Производная здесь понимается в том смысле, как это определено в (1) или (2). Как показано в (1), она полностью совпадает с (несмешанной) производной в смысле С. Л. Соболева (4).

Аналогично определяются классы $H_{p, x_i}^{(r)}(G; M)$ ($i = 1, \dots, n$). Если функция f одновременно принадлежит к классам $H_{p, x_i}^{(r_i)}(G; M_i)$ ($i = 1, \dots, n$), то будем писать $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(G; M_1, \dots, M_n)$. В случае, если $G = R_n$, то будем писать еще короче: $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(M_1, \dots, M_n)$.

Теорема 1. Если $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(G; M_1, \dots, M_n)$, то, каково бы ни было $\eta > 0$, существует ее продолжение с G_η на пространство R_n с сохранением дифференциальных свойств. Точнее, существует функция φ , определенная на R_n и принадлежащая к классу $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_n)$, совпадающая с f на G_η , где

$$\bar{M}_i \leq c_\eta (\|f\|_{L_p(G)} + M_i), \quad \|\varphi\| \leq c_\eta \|f\|_{L_p(G)}. \quad (3)$$

Здесь c_n зависит только от G_n и

$$\|f\|_{L_p(G)} = \left(\int_G \dots \int |f|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p}.$$

Теорема 2. Пусть $r > 0$ и $r = \bar{r} + \alpha$, где \bar{r} — целое и $0 < \alpha \leq 1$. Пусть, далее, некоторая область $G \subset R_n$ взаимно-однозначно отображается в область $G^* \subset R_n$ при помощи функций

$$u_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i = m+1, \dots, n)$$

непрерывных и имеющих непрерывные и ограниченные на G частные производные порядков, не превышающих $\bar{r} + 1$, и таких, что якобиан

$$\frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} > K > 0 \quad (\text{на } G).$$

Пусть, наконец, $f(u_1, \dots, u_n) \in H_p^{(r)}(G^*; M^*)$.

Тогда, каково бы ни было $\eta > 0$, функция $F = f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ от переменных x_1, \dots, x_n принадлежит к классу $H_p^{(r)}(G_n; M_n)$,

$$M_n < a_n (\|f\|_{L_p(G^*)} + M^*),$$

$$\|F\|_{L_p(G_n)} < \frac{1}{K^{1/p}} \|f\|_{L_p(G^*)}.$$

Если функция $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(M_1, \dots, M_n)$, то она, вообще говоря, определена с точностью до n -мерной меры нуль. Поэтому неясно, что надо понимать под функцией

$$\psi(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

от переменных x_1, \dots, x_m , получаемой из f при фиксированных $x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. Условимся, что это есть такая функция, для которой

$$\lim_{\sum_{m+1}^n |x_k - x_k^{(0)}| \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})|^p dx_1 \dots dx_m \right)^{1/p} = 0.$$

Можно доказать, что такая сходимость для рассматриваемой функции имеет место при условиях, рассматриваемых ниже.

Из теоремы 12, опубликованной в работе (1), непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Задана функция $f = f(x_1, \dots, x_n)$, принадлежащая к классу $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(M, \dots, M)$, и пусть $1 \leq m < n$ и для некоторых неотрицательных целых чисел $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$, образующих систему (λ) , выполняется неравенство

$$\rho_i^{(\lambda)} = r_i \left(1 - \sum_{m+1}^n \frac{\lambda_j}{r_j} - \frac{1}{p} \sum_{m+1}^n \frac{1}{r_j} \right) > 0. \quad (4)$$

Тогда частная производная

$$\psi(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial^{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \dots \partial x_n^{\lambda_n}} \quad (5)$$

как функция от x_1, \dots, x_m при любых фиксированных x_{m+1}, \dots, x_n принадлежит к классу $H_p^{(\rho_1^{(\lambda)}, \dots, \rho_m^{(\lambda)})}(K, \dots, K)$, где

$$K < c(\|f\|_p^{(n)} + M),$$

$$\|\psi\|_p^{(m)} < c(\|f\|_p^{(n)} + M).$$

Здесь значок $\|\psi\|_p^{(m)}$ обозначает норму в смысле L_p функции ψ по пространству R_m .

Теорема 12 в работе (1) была снабжена примерами, из которых видно, что утверждение, в ней доказываемое, а следовательно, и в сформулированной здесь теореме 3, не может быть усилено. Относящиеся к этому вопросу добавочные примеры см. (5).

Следующая теорема представляет собой обращение теоремы 3. Она усиливает наш прежний результат (3).

Теорема 4. Заданы положительные числа r_i ($i = 1, \dots, n$) и всевозможные допустимые системы (λ) неотрицательных целых чисел $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$, для которых выполняется неравенство (4). Пусть, кроме этого, каждой системе (λ) приведена в соответствие функция $\varphi_{(\lambda)}(x_1, \dots, x_m)$ от m переменных, принадлежащая к классу

$$\varphi_{(\lambda)} \in H_p^{(\rho_1^{(\lambda)}, \dots, \rho_m^{(\lambda)})}(M^{(\lambda)}, \dots, M^{(\lambda)}).$$

Тогда можно построить функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных, обладающую следующими свойствами:

$$1) f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(K, \dots, K), \quad (7)$$

где

$$K < c \sum_{(\lambda)} (\|\varphi_{(\lambda)}\|_p^{(m)} + M^{(\lambda)}), \quad \|f\|_p^{(n)} < c \sum_{(\lambda)} (\|\varphi_{(\lambda)}\|_p^{(m)} + M^{(\lambda)})$$

и c — некоторая константа;

$$2) \frac{\partial^{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \dots \partial x_n^{\lambda_n}} = \varphi_{(\lambda)}(x_1, \dots, x_m), \quad (8)$$

какова бы ни была допустимая система (λ) .

Мы видим, что теоремы 3 и 4 дают возможность в известном смысле исчерпывающе судить о свойствах дифференцируемых функций на тех или иных линейных подпространствах основного пространства, параллельных осям координат.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
29 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 38, 244 (1951). ² С. М. Никольский, ДАН, 76, 785 (1951). ³ С. М. Никольский, ДАН, 82, 521 (1952). ⁴ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. ⁵ Т. И. Аманов, ДАН, 88, № 1 (1953).