Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Е. С. ЛЯПИН

АССОЦИАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ ВСЕХ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 XI 1952)

1°. Главной целью настоящей заметки является формулировка абстрактной характеристики систем всех частичных преобразований различных множеств. Частичные преобразования представляют естественный интерес как с точки зрения самой алгебры, так и вследствие их роли в других математических дисциплинах (см., например, ([1-4])). Абстрактной характеристикой систем частичных преобразований занимался В. В. Вагнер ([1,3]); ему же я обязан постановкой рассматриваемой ниже задачи.

Доказательства сообщаемых ниже результатов лишь намечены. Некоторые из построений, используемых при подробном доказательстве, имеют родство с построениями А. И. Мальцева, проводимыми им при изучении симметрических группоидов ([5]).

2°. Множество, в котором определено ассоциативное умножение, будем называть с и с т е м о й (сокращение полного наименования — ассоциативная система, равнозначного терминам полугруппа и ассоциативный группоид). Термины п о д с и с т е м а, и д е а л, и д е м п о т е н т, н у л е в о й э л е м е н т, и з о м о р ф и з м, г о м о м о р ф и з м, а в т о м о р ф и з м употребляются в обычном смысле (см., например, ([6])).

Пусть Γ_1 и Γ_2 — два равномощных подмножества Ω. Взаимно-однозначное отображение X_{Γ_1,Γ_2} множества Γ_1 на Γ_2 назовем, согласно ([1,4]), ч а с т и ч н ы м п р е о б р а з о в а н и е м множества Ω. Пусть $A = X_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, $B = X_{\Gamma_3,\Gamma_4}$, $C = X_{\Gamma_5,\Gamma_6}$ — три частичных преобразования множества Ω. Будем говорить, что C есть п р о и з в е д е н и е A и B: $C = AB$, если $A[B(\alpha)] = C(\alpha)$ для всякого $\alpha \in \Gamma_3$, такого, что $B(\alpha) \in \Gamma_1$, причем Γ_5 состоит только из таких элементов α. Если Γ_1 и Γ_2 пусты, то X_{Γ_1,Γ_2} будем обозначать через O. Совокупность всех частичных преобразований множества Ω будем обозначать через $\mathfrak{U}_\Omega$. Относительно определенного выше умножения $\mathfrak{U}_\Omega$, очевидно, является системой. O есть нуль этой системы.

Если Γ_1 состоит из одного элемента α и Γ_2 — из одного элемента β, то X_{Γ_1,Γ_2} будем обозначать через $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$. Множество, состоящее из O и всех частичных преобразований вида $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \Omega)$, обозначим через $\mathfrak{V}_\Omega$. Идемпотентами $\mathfrak{V}_\Omega$ являются элементы $\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$ $(\alpha \in \Omega)$ и O. Их совокупность обозначим через $\mathfrak{W}_\Omega$. Очевидно, $\mathfrak{V}_\Omega$ и $\mathfrak{W}_\Omega$ являются подсистемами $\mathfrak{U}_\Omega$.

3°. Будем говорить, что система $\mathfrak{A}$ принадлежит классу Σ_1, если $\mathfrak{A}$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathfrak{A}$ обладает нулевым элементом;

2) для каждого элемента $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ найдется пара идемпотентов E, J таких, что $EA = AJ = A$;

3) для каждой пары ненулевых идемпотентов E, J в $\mathfrak{A}$ найдется такой ненулевой элемент A, что $EA = AJ = A$;

4) произведение любых двух различных идемпотентов системы равно нулевому элементу.

Легко видеть, что соответствие между ненулевыми элементами и парами ненулевых идемпотентов, получающееся благодаря выполнению свойств 2) и 3), взаимно-однозначно. Пользуясь этим, нетрудно показать, что *система $\mathfrak{B}_\Omega$ при любом Ω принадлежит Σ_1, и всякая система $\mathfrak{A}$, принадлежащая Σ_1, изоморфна некоторой $\mathfrak{B}_\Omega$.*

Отметим, между прочим, что закон умножения элементов системы $\mathfrak{B}_\Omega$ позволяет трактовать их как квадратные матрицы порядка μ (где μ — мощность Ω), строки и столбцы которых занумерованы при помощи элементов из Ω, причем все элементы матрицы равны 0, кроме элемента в α-й строке и β-м столбце $\left(\text{для } \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\right)$, который равен 1.

4°. Пусть некоторая система $\mathfrak{A}$ содержит в качестве своего идеала систему $\mathfrak{B}_\Omega$. Определим отображение ξ системы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{U}_\Omega$:

$$\xi X = \overline{X}, \quad \text{где} \quad \overline{X}(\alpha) = \beta, \quad \text{если} \quad \left(X \cdot \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}\right)(\alpha) = \beta \quad (X \in \mathfrak{A},\ \overline{X} \in \mathfrak{U}_\Omega,\ \alpha \in \Omega)$$

(замечаем, что $Y = X \cdot \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\end{bmatrix} \in \mathfrak{B}_\Omega$, так как $\mathfrak{B}_\Omega$ есть идеал $\mathfrak{A}$; так как Y оказывается частичным преобразованием Ω, то выражение Y_α имеет смысл).

Можно показать, что отображение ξ является гомоморфизмом. При этом для любого $X \in \mathfrak{B}_\Omega$ имеет место $\xi X = X$.

5°. Пусть $\mathfrak{T}$ есть подсистема системы $\mathfrak{A}$. Если φ есть гомоморфизм системы $\mathfrak{A}$ на систему $\varphi\mathfrak{A}$, то φ очевидным образом индуцирует гомоморфизм $\overline{\varphi}$ системы $\mathfrak{T}$ на $\varphi\mathfrak{T}$. Если φ есть изоморфизм, то и $\overline{\varphi}$ является изоморфизмом. Однако наравне с этим вполне возможен и такой случай, когда гомоморфизм φ не является изоморфизмом (т. е. для некоторых $X, Y \in \mathfrak{A}$, $X \neq Y$, имеет место $\varphi X = \varphi Y$), тогда как $\overline{\varphi}$ есть изоморфизм (т. е. для всяких $X, Y \in \mathfrak{T}$, $X \neq Y$, обязательно $\varphi X \neq \varphi Y$).

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что идеал $\mathfrak{T}$ системы $\mathfrak{A}$ п л о т н о в л о ж е н в $\mathfrak{A}$, если изо всех гомоморфизмов системы $\mathfrak{A}$ только изоморфизмы $\mathfrak{A}$ индуцируют изоморфизмы $\mathfrak{T}$, причем любая система $\mathfrak{A}'$, содержащая $\mathfrak{A}$ и отличная от $\mathfrak{A}$, для которой $\mathfrak{T}$ является идеалом, обладает гомоморфизмом, не являющимся изоморфизмом, но индуцирующим в $\mathfrak{T}$ изоморфизм.

Используя построение 4°, можно доказать, что *$\mathfrak{B}_\Omega$ является плотно вложенным идеалом системы $\mathfrak{U}_\Omega$.*

6°. Опираясь на 3°, 4°, 5°, можно вывести следующую абстрактную характеристику систем всех частичных преобразований.

Т е о р е м а. *Для того чтобы система $\mathfrak{A}$ была изоморфна системе всех частичных преобразований некоторого множества, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ обладала плотно вложенным идеалом, принадлежащим классу Σ_1.*

7°. Если идеал системы содержит не менее двух элементов, то назовем его н е н у л е в ы м и д е а л о м. Если пересечение всех ненулевых идеалов системы само является ненулевым идеалом, то назовем его м и н и м а л ь н ы м н е н у л е в ы м и д е а л о м.

Легко получить следующее дополнение к теореме 6°.

Если система $\mathfrak{A}$, содержащая не менее двух различных элементов, обладает плотно вложенным идеалом $\mathfrak{T}$, принадлежащим классу Σ_1, то $\mathfrak{T}$ является минимальным ненулевым идеалом системы $\mathfrak{A}$.

8°. Из 7° следует, что всякий автоморфизм системы $\mathfrak{U}_\Omega$ индуцирует автоморфизм системы $\mathfrak{V}_\Omega$, а потому индуцирует автоморфизм и в $\mathfrak{W}_\Omega$. Нетрудно показать, что различные автоморфизмы $\mathfrak{U}_\Omega$ индуцируют и в $\mathfrak{W}_\Omega$ различные же автоморфизмы. Автоморфизмами являются всевозможные взаимно-однозначные отображения множества $(\mathfrak{W}_\Omega \setminus O)$ на себя, следовательно, они описываются всевозможными взаимно-однозначными отображениями на себя множества Ω. Так как всякий автоморфизм $\mathfrak{W}_\Omega$ можно продолжить до автоморфизма всей системы $\mathfrak{U}_\Omega$, то получаем изоморфизм между группой всех автоморфизмов системы $\mathfrak{U}_\Omega$ и симметрической группой всех взаимно-однозначных отображений на себя множества Ω. Каждый из автоморфизмов φ системы $\mathfrak{A}_\Omega$ может быть назван внутренним. Именно, если автоморфизму φ соответствует при указанном изоморфизме взаимно-однозначное отображение множества Ω на себя S_φ (тем самым $S_\varphi \in \mathfrak{U}_\Omega$), то $\varphi X = S_\varphi X S_\varphi^{-1}$ для любого $X \in \mathfrak{U}_\Omega$.

9°. Понятие плотно вложенного идеала может быть использовано для получения абстрактной характеристики и других конкретных систем.

Будем говорить, что система $\mathfrak{A}$ принадлежит классу Σ_2, если в $\mathfrak{A}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$ имеет место $XY = X$.

Можно показать, что *для того, чтобы система $\mathfrak{A}$ была изоморфна системе всех отображений в себя некоторого множества, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ имела плотно вложенный идеал, принадлежащий классу Σ_2.*

Это есть не что иное, как некоторое видоизменение результата А. И. Мальцева ([5]), дающего абстрактную характеристику симметрических группоидов, т. е. систем всех отображений в себя различных множеств.

Поступило
26 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Вагнер, Усп. матем. наук, 7, в. 2 (48), 146 (1952). [2] В. В. Вагнер, ДАН, 84, № 4, 653 (1952). [3] В. В. Вагнер, ДАН, 84, № 6, 1119 (1952). [4] D. Rees, J. London Math. Soc., 22, 281 (1947). [5] А. И. Мальцев, Матем. сборн., 31 (73): 1, 136 (1952). [6] Е. С. Ляпин, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 179 (1950).