Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

ЛИНЕЙНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 X 1952)

I. Пусть $f(x)$ — функция, определенная для $-\infty < x < \infty$. Положим $f_t(x) = f(x+t)$.

В настоящей заметке рассматривается функциональное пространство E, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) Элементы E суть 2π-периодические функции, суммируемые на интервале $[-\pi, \pi]$.

2) E является линейным нормированным пространством. При этом сложение функций и умножение функций на число определяются обычным образом.

3) Если $f \in E$, то $f_t \in E$ при любом t, $-\infty < t < \infty$.

4) Существует множество $G = G_E$ 2π-периодических, суммируемых на $[-\pi, \pi]$ функций, такое, что

а) если $f \in E$ и $g \in G$, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi} fg\,dx < \infty$;

б) если $f \in E$, то $\|f\|_E = \sup\limits_{g \in G} \int\limits_{-\pi}^{\pi} fg\,dx$;

в) если $g \in G$, то $g_t \in G$, $-\infty < t < \infty$;

г) если $g \in G$, а $h(x)$ есть 2π-периодическая измеримая функция такая, что почти везде $|h(x)| \leqslant 1$, то $gh \in G$.

5) E содержит множество Q всех тригонометрических полиномов, причем Q всюду плотно в E.

Нетрудно видеть, что пространства $\widetilde{C}$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{L}^{(M)}$ ([1], [2]) являются пространствами типа E. Пространства типа E имеют много общего с пространствами $\widetilde{F}_6$, введенными С. М. Лозинским ([3]).

Пусть E_1 и E_2 пространства типа E. Будем говорить, что $U(f, x)$ есть линейная тригонометрическая полиномиальная операция порядка n типа K (коротко: ЛТПО n/K), если:

1) $U(f, x)$ есть линейная операция, переводящая E_1 в E_2;

2) для любой $f \in E_1$ $U(f, x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n.

Для любого тригонометрического полинома $T(x)$ порядка не выше n справедливо равенство

$$U(T, x) = \int\limits_0^{2\pi} T(x+t) K(t)\,dt = \sigma_n(T, x), \tag{1}$$

где $K(t)$ — заданный тригонометрический полином порядка n.

II. В настоящем пункте будет установлена связь между произвольной ЛТПО n/K и простейшей операцией такого типа $\sigma_n(f, x)$.

Теорема 1. *Пусть $f \in E_1$ и $U(f, x)$ — произвольная ЛТПО n/K, переводящая E_1 в E_2.*

Тогда имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(f_t, x-t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(x+t)\,K(t)\,dt = \sigma_n(f, x). \tag{2}$$

Для доказательства теоремы 1 нам нужна следующая лемма.

Лемма. *Пусть $A(f, x)$ есть произвольный линейный оператор, переводящий E_1 в E_2 и обладающий тем свойством, что $A(f_t, x-t)$ измеримо относительно t.*

Тогда имеет место неравенство

$$\left\| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(f_t, x-t)\,dt \right\|_{E_2} \leqslant \| A \|_{E_1}^{E_2} \| f \|_{E_1}. \tag{3}$$

Доказательство. Положим

$$a = a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(f_t, x-t)\,dt.$$

Обозначим через $G_2 = G_{E_2}$ множество функций из аксиомы 4, соответствующее пространству E_2. Из аксиомы 4 следует, что

$$\| a \|_{E_2} = \sup_{g \in G_2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(f_t, x-t)\,dt \right] g(x)\,dx. \tag{4}$$

Очевидно, что правая часть (4) не превосходит

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\sup_{g \in G_2} \int_0^{2\pi} A(f_t, x-t)\,g(x)\,dx \right] dt. \tag{5}$$

Из аксиомы 4в) легко следует, что выражение (5) равно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| A(f_t) \|_{E_2}\,dt.$$

Таким образом,

$$\| a \|_{E_2} \leqslant \| A \|_{E_1}^{E_2} \| f \|_{E_1},$$

ибо легко доказать, что $\| f_t \|_{E_1} = \| f \|_{E_1}$.

Доказательство теоремы 1. Заметим сперва, что формула (2) справедлива для любой функции тригонометрической системы $\{\cos kx\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$.

Рассмотрим, например, $f(x) = \cos mx$. Допустим сначала, что $m \leqslant n$, тогда из определения ЛТПО n/K следует, что

$$U(f_t, x) = \int_0^{2\pi} \cos m(x+t+t_1)\,K(t_1)\,dt_1.$$

Значит,

$$U(f_t, x-t) = \int_0^{2\pi} \cos m(x+t_1)\,K(t_1)\,dt_1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(f_t, x-t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos m(x+t)\,K(t)\,dt.$$

Стало быть, для функции $\cos mx$ при $m \leqslant n$ имеет место формула (2).

Если $m > n$, то рассуждаем следующим образом. Из линейности оператора $U(f, x)$ следует, что

$$U(f_t, x) = \cos mt\, U(\cos mx) - \sin mt\, U(\sin mx). \tag{6}$$

Из определения ЛТПО n/K следует, что $U(\cos mx)$ и $U(\sin mx)$ суть тригонометрические полиномы порядка не выше n. Пусть $Q(x) = U(\cos mx)$ и $P(x) = U(\sin mx)$. Тогда из (6) следует, что $U(f_t, x-t) = \cos mt\, Q(x-t) - \sin mt\, P(x-t)$. Значит, при $m > n$

$$\int_0^{2\pi} U(f_t, x-t)\,dt = 0. \tag{7}$$

Так как $K(t)$ — тригонометрический полином порядка n, то при $m > n$

$$\int_0^{2\pi} \cos m(x+t)\,K(t)\,dt = 0. \tag{8}$$

Итак, из (7) и (8) следует, что для $\cos mx$ формула (2) также имеет место, когда $m > n$.

Из сделанного замечания и линейности оператора $U(f, x)$ следует, что формула (2) справедлива для любого тригонометрического полинома.

Пусть теперь f — произвольная функция $\in E_1$. Согласно аксиоме 5, по $\varepsilon > 0$ можно найти такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$\|f - T\|_{E_1} < \varepsilon. \tag{9}$$

Из доказанного следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(f_t, x-t)\,dt - \sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U((f-T)_t, x-t)\,dt - \sigma_n(f-T, x). \tag{10}$$

Из леммы *, (9) и (10) следует, что

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(f_t, x-t)\,dt - \sigma_n(f, x)\right\|_{E_2} \leqslant \left(\|U\|_{E_1}^{E_2} + \|\sigma_n\|_{E_1}^{E_2}\right)\varepsilon. \tag{11}$$

Неравенство (11), в силу произвольности ε, доказывает теорему 1.

Теоремы 1 и 3 моей заметки (2) вытекают из теоремы 1.

III. Теорему 1 можно, в частности, использовать для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $U(f, x)$ — произвольная ЛТПО n/K, переводящая E_1 в E_2.*

Тогда справедливо неравенство

$$\|U\|_{E_1}^{E_2} \geqslant \|\sigma_n\|_{E_1}^{E_2}.$$

---

* Легко доказать, что $U(f_t, x-t)$ есть непрерывная функция от t, а потому лемма применима.

Доказательство. Из формулы (2) и леммы следует, что

$$\| \sigma_n (f_1 x) \|_{E_2} \leqslant \| U \|_{E_1}^{E_2} \| f \|_{E_1}.$$

Отсюда, очевидно, следует теорема 2.

Если пространства E_1 и E_2 полные, то теорема 2 вытекает из теоремы Лозинского ([3]).

Поступило
1 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Лозинский, ДАН, 61, № 2 (1948). [2] Д. Л. Берман, ДАН, 85, № 1 (1952). [3] С. М. Лозинский, ДАН, 64, № 4 (1949).