

Т. И. АМАНОВ

К ТЕОРЕМЕ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ
МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 XI 1952)

В работе (1) С. М. Никольский доказал для классов функций многих переменных $H_{p, x_1, \dots, x_n}^{(r_1, \dots, r_n)}(M_1, \dots, M_n)$, которые там введены, следующую теорему, обобщающую в случае бесконечного пространства известные теоремы вложения С. Л. Соболева и В. И. Кондрашева (2):
Пусть $1 \leq p \leq p' \leq \infty$, $1 \leq m \leq n$, $r_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) и

$$\chi_m = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right) \sum_1^m \frac{1}{r_i} - \frac{1}{p} \sum_{m+1}^n \frac{1}{r_i} > 0. \quad (1)$$

Тогда, если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит к классу $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}(M_1, \dots, M_n)$, то:

а) Она принадлежит также по переменным (x_1, \dots, x_m) при любых фиксированных (x_{m+1}, \dots, x_n) к классу $H_{p'}^{(\rho_1^{(m)}, \dots, \rho_m^{(m)})}(M_1^*, \dots, M_m^*)$, где $\rho_i^{(m)} = r_i \chi_m$, $M_i^* \leq \alpha \|f\|_p^{(n)} + \beta \sum_1^n M_k$ и α зависит только от n , а β — от n ; m, r_1, \dots, r_n .

б) Если выполнено условие

$$1 - \frac{1}{p} \sum_1^n \frac{1}{r_i} > 0, \quad p > 1, \quad (2)$$

то для любых p' и m , удовлетворяющих неравенствам $1 < p \leq p' \leq \infty$ и $1 \leq m \leq n$, можно указать функцию f , принадлежащую к $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$, но не принадлежащую (ни при каких M) к классу

$$H^{(\rho_1^{(m)}, \dots, \rho_{i-1}^{(m)}, \rho_i^{(m)+\varepsilon}, \rho_{i+1}^{(m)}, \dots, \rho_m^{(m)})},$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

В настоящей заметке будет показано, что предложение б) имеет место без ограничения (2) при выполнении только естественного условия (1), откуда будет следовать, что утверждение а) не может быть уточнено при каких угодно p, p', m и n , удовлетворяющих (1).

Будем говорить, что $f(x_1, \dots, x_n)$ — граничная функция класса $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$, если она принадлежит к этому классу, но ни при каких постоянных M не принадлежит по крайней мере к одному из классов $H_{p, x_1}^{(r_1+\varepsilon)}$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

Нетрудно видеть, в силу а), что наша задача сводится к тому, чтобы показать существование функции f , принадлежащей к $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ и являющейся граничной в классе $H_p^{(\rho_1^{(m)}, \dots, \rho_m^{(m)})}$.

С. М. Никольский ⁽¹⁾ показал, что функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^n D_{r_1 \dots r_n \nu}(x_j)}{a^{\nu} r_1 \dots r_n \left(1 + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}\right)^{\nu}}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a > 1; \quad D_N(x) = \frac{\sin Nx}{x}\right)$$

является именно такой функцией, если только выполнено условие (2). Мы доказываем, что эта функция является граничной в классе $H_p^{(\rho_1^{(m)}, \dots, \rho_m^{(m)})}$ при $p > 1$ только при естественном условии (1) без ограничения (2), если $a > 0$ достаточно велико.

Далее мы строим пример подобной функции, принадлежащей к $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ и являющейся граничной в $H_p^{(\rho_1^{(m)}, \dots, \rho_m^{(m)})}$ при $p \geq 1$. Она имеет вид

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^n F_{r_1 \dots r_n \nu}(x_j)}{a^{\nu} r_1 \dots r_n \left(1 + \left(1 + \frac{1}{q}\right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}\right)^{\nu}}, \quad (4)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \geq 1$, $a > 0$ достаточно велико,

$$F_N(x) = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} Nx}{x}\right)^2.$$

Далее строятся примеры подобных граничных функций для периодического случая, т. е. для классов $H_p^{*(r_1, \dots, r_n)}$, которые определены в той же работе ⁽¹⁾. В периодическом случае граничными функциями являются, соответственно, функции вида (3) и (4), где $D_{N_j}(x)$ и

$F_{N_j}(x)$ при $N_j = a \frac{r_1 \dots r_n \nu}{r_j}$ соответственно заменяются на $D_{[N_j]}^*(x)$ и $F_{[N_j]}^*(x)$, полагая

$$D_N^*(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2} x}; \quad F_N^*(x) = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} Nx}{\sin \frac{1}{2} x}\right)^2,$$

a — достаточно большое положительное число, а $[N_j]$ — целая часть N_j .

Наше утверждение мы сначала доказываем для одномерного случая, а затем доказательство завершается методом индукции. Для примера ниже приводится полное доказательство в случае (3).

Тот факт, что $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ при любых $a > 1$ и $r_i > 0$, вытекает из теоремы 9 ⁽¹⁾ при помощи обычных оценок.

Лемма 1. Функция $D_n(x)$ обладает следующими свойствами:

$$D_n(x) < 0, \quad 0 < nx < \pi; \quad (5)$$

$$|D_n(x+h)| > |D_n(x)| \geq \frac{2n^3}{3\pi} x, \quad 0 < nx < n(x+h) \leq \frac{\pi}{2}; \quad (6)$$

$$\|D_n\|_p^{(1)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_n(x)|^p dx\right)^{1/p} = c_p n^{1/q} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1\right) \quad (7)$$

где $c_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|^p dx\right)^{1/p}$.

Лемма 2. Если хотя бы одно из чисел $r_i \leq 1/p$, то функция f , определенная рядом (3), при достаточно большом $a > 0$ является граничной функцией класса $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$.

Действительно, пусть $r_1 \leq 1/p$. Покажем, что f не принадлежит к $H_p^{(r_1 + \varepsilon, r_2, \dots, r_n)}$ ($\varepsilon > 0$). Так как $p > 1$, а следовательно, $r_1 < 1$, то для этого достаточно построить последовательность положительных $h \rightarrow 0$, для которых

$$\|f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_p^{(n)} > Mh^{r_1}, \quad (8)$$

где $M > 0$ — константа, не зависящая от h .

Зададим натуральное число μ и положим

$$h = h(\mu) = \frac{1}{2} a^{-(\mu-1)r_2 \dots r_n}. \quad (9)$$

Тогда при $0 < x_1 < h$ и $\nu = 1, \dots, \mu - 1$ $a^{r_2 \dots r_n \nu} (x + h) \leq 1$, и мы находимся в условиях леммы 1.

Кроме того, при $0 < x_j < (2h)^{r_1/r_j}$ ($j = 2, \dots, n$; $\nu = 1, \dots, \mu - 1$) имеем $a^{\frac{r_1 \dots r_n \nu}{r_j}} x_j \leq 1$, откуда легко следует, что

$$D_{\frac{r_1 \dots r_n \nu}{r_j}}(x_j) > \frac{2}{\pi} a^{\frac{r_1 \dots r_n \nu}{r_j}} \quad (j = 2, \dots, n; \nu = 1, \dots, \mu - 1). \quad (10)$$

Введем в рассмотрение следующее выражение:

$$s(h) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{[D_{a^{r_2 \dots r_n \nu}}(x_1+h) - D_{a^{r_1 \dots r_n \nu}}(x_1)] \prod_{j=2}^n D_{\frac{r_1 \dots r_n \nu}{r_j}}(x_j)}{a^{\frac{r_1 \dots r_n \nu}{r_j}} \left(1 + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}\right)^\nu} dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p}.$$

Применяя лемму 1 и неравенство Гельдера, отсюда, в силу (10), получим:

$$s(h) > \frac{2^{r_1-2+\frac{1}{q}}}{3\pi^2} h^{r_1}; \quad (11)$$

$$\sigma(h) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{[D_{a^{r_2 \dots r_n \nu}}(x_1+h) - D_{a^{r_2 \dots r_n \nu}}(x_1)] \prod_{j=2}^n D_{\frac{r_1 \dots r_n \nu}{r_j}}(x_j)}{a^{\frac{r_1 \dots r_n \nu}{r_j}} \left(1 + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}\right)^\nu} dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq 2 \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{1}{a^{\frac{r_1 \dots r_n \nu}{r_j}} \left(1 + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}\right)^\nu} \prod_{j=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} D_{\frac{r_1 \dots r_n \nu}{r_j}}(x_j) dx_j \right)^{1/p} \leq \frac{2^{1+r_1} C_p^n}{a^{r_1 \dots r_n - 1}} h^{r_1} \quad (12)$$

в силу (7). Очевидно,

$$\|f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_p^{(n)} \geq s(h) - \sigma(h) > Mh^{r_1},$$

где $M = \frac{2^{r_1-2+\frac{1}{q}}}{3\pi^2} - \frac{2^{1+r_1} C_p^n}{a^{r_1 \dots r_n - 1}} > 0$ при достаточно большом $a > 0$.

Лемма доказана полностью.

Лемма 3. Функция f , определяемая равенством (3), при достаточно большом $a > 0$ есть граничная в классе $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$.

Доказательство. При $n = 1$ наша функция имеет вид:

$$f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{D_{a^v}(x)}{a \left(r + \frac{1}{q}\right)^v}.$$

Справедливость леммы при $n = 1$, если $1 - \frac{1}{pr} > 0$, доказана С. М. Никольским в работе (1), если же $1 - \frac{1}{pr} \leq 1$, то она вытекает из леммы 2.

Докажем теперь нашу лемму для произвольного n , допуская, что она верна для $n - 1$. Если одно из чисел $r_i \leq 1/p$, то утверждение вытекает из леммы 2. Допустим поэтому, что одна из разностей $1 - \frac{1}{pr_i}$ положительна, для определенности, например, пусть $1 - \frac{1}{pr_n} > 0$. Тогда, в силу теоремы вложения С. М. Никольского, функция

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} D_{\rho_j \dots \rho_{n-1}}(x_j)}{b \rho_j \left(1 + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\rho_i}\right)^v},$$

где $\rho_i = r_i \left(1 - \frac{1}{pr_n}\right) = r_i \chi$; $b = a^{\frac{r_n}{x^{n-2}}}$, принадлежит к классу $H_p^{(\rho_1, \dots, \rho_{n-1})}$.

Она является граничной в этом классе в силу допущения справедливости леммы 3 для $n - 1$. Но в таком случае, по теореме вложения, она должна быть граничной также в классе $H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$, и лемма доказана.

Из леммы 3 непосредственно следует наше утверждение, что функция $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ является граничной в классе $H_{p'}^{(\rho_1, \dots, \rho_m)}$, если принять во внимание, что функцию $f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ можно представить в виде:

$$f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^m D_{\rho_j \dots \rho_m}(x_j)}{b \rho_j \left(1 + \frac{1}{q'} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\rho_i}\right)^v},$$

где $\rho_i = r_i \chi$; $\chi = 1 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right) \sum_{i=1}^m \frac{1}{r_i} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} > 0$, $b = a^{\frac{r_{m+1} \dots r_n}{x^{m-1}}}$,

$1 < p \leq p' \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$; $1 \leq m \leq n$.

В заключение приношу глубокую благодарность С. М. Никольскому, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
29 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38, 244 (1951).
² С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950.