Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 5

ФИЗИКА

Ю. П. ЛЫСАНОВ

К ВОПРОСУ О РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 20 X 1952)

В работе Л. М. Бреховских [1] решена задача о рассеянии плоских электромагнитных волн на абсолютно проводящей неровной поверхности. В настоящей заметке дается обобщение решения задачи на случай, когда нижняя среда характеризуется конечной проводимостью σ и комплексной диэлектрической постоянной ε. В этом случае коэффициент отражения будет функцией угла падения или, так как поверхность неровная, функцией точки поверхности.

Пусть на неровную поверхность падает волна, которую зададим в виде $e^{i(\mathbf{k}^0\mathbf{r})}$. Зависимость всех составляющих поля от времени принимаем в виде $e^{-i\omega t}$ и в дальнейшем этого множителя не пишем. Уравнение неровной поверхности пусть будет задано в виде $Z=Z(X, Y)$, где Z — периодическая функция относительно X, Y с периодами, соответственно равными L_x, L_y (X, Y, Z — координаты точек поверхности). Рассматриваем только такие случаи падения волны, когда на поверхности нет затененных участков. Задача заключается в нахождении поля рассеянной волны в некоторой произвольной точке $P(x, y, z)$. Воспользуемся векторным аналогом формулы Грина [2]:

$$\mathbf{E}(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S \{ik[\mathbf{nH}]\varphi+(\mathbf{nE})\operatorname{grad}\varphi+[[\mathbf{nE}]\operatorname{grad}\varphi]\}\,dS; \qquad (1)$$

$\varphi=\frac{e^{ikR}}{R}$; $R=\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}$ — расстояние между точкой $P(x, y, z)$ и текущей точкой (X, Y, Z) на поверхности; $\mathbf{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ — единичный вектор внутренней нормали к поверхности; $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — значения поля на поверхности. Будем предполагать, так же как и в [1], что $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ на самой поверхности могут быть получены по обычным законам отражения плоских волн от плоскости, касательной к поверхности в данной точке, т. е. для вычисления $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ на поверхности достаточно взять сумму падающей и отраженной волн.

Рассмотрим случай, когда магнитный вектор падающей волны перпендикулярен плоскости xz. Тогда на поверхности для падающей волны имеем

$$H_y^0=e^{i(k_x^0X+k_z^0Z)}. \qquad (2)$$

Представим магнитный и электрический векторы падающей волны в точке падения на поверхности в виде суммы трех векторов:

$$\mathbf{H}^0=H_n^0\mathbf{n}+H_s^0\mathbf{s}+H_p^0\mathbf{p};\quad \mathbf{E}^0=E_n^0\mathbf{n}+E_s^0\mathbf{s}+E_p^0\mathbf{p}, \qquad (3)$$

где **s** и **p** — единичные векторы, вводимые при помощи соотношений:

$$\mathbf{s} \equiv \frac{1}{k \sin \theta} [\mathbf{n}\,\mathbf{k}^0]; \quad \mathbf{p} \equiv [\mathbf{n}\,\mathbf{s}]; \tag{4}$$

θ — угол между **n** и $\mathbf{k}^0$. Очевидно, **n**, **s** и **p** образуют тройку взаимно-ортогональных векторов, причем **p** характеризует направление, соответствующее плоскости падения (плоскость, проведенная через **n** и $\mathbf{k}^0$), **s** — нормальное к ней. Плоскость падения в разных точках поверхности имеет различное направление в пространстве.

H_n^0, H_s^0, H_p^0 определяются из соотношений:

$$H_n^0 = (\mathbf{H}^0 \mathbf{n}); \quad H_s^0 = (\mathbf{H}^0 \mathbf{s}); \quad H_p^0 = (\mathbf{H}^0 \mathbf{p}). \tag{5}$$

Используя соотношение $\mathbf{E}^0 = -\frac{1}{k}[\mathbf{k}^0 \mathbf{H}^0]$ между векторами $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ в плоской волне, для компонент электрического вектора получаем:

$$E_n^0 = -H_s^0 \sin\theta; \quad E_s^0 = H_n^0 \sin\theta - H_p^0 \cos\theta; \quad E_p^0 = H_s^0 \cos\theta. \tag{6}$$

Если обозначить через V_1 коэффициент отражения для случая, когда электрический вектор волны перпендикулярен плоскости падения, а через V_2 — коэффициент отражения для случая, когда электрический вектор лежит в плоскости падения, то поле на поверхности может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (1 + V_2) E_n^0 \mathbf{n} + (1 - V_1) E_s^0 \mathbf{s} + (1 - V_2) E_p^0 \mathbf{p}; \\ \mathbf{H} &= (1 - V_1) H_n^0 \mathbf{n} + (1 + V_2) H_s^0 \mathbf{s} + (1 + V_1) H_p^0 \mathbf{p}. \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя (7) в (1) и применяя к вычислению интеграла (1) метод, развитый Л. М. Бреховских, можно поле в точке $P(x, y, z)$ представить в виде суперпозиции плоских волн:

$$E_x(P) = \frac{1}{2} \sum_{m,\, n=-\infty}^{+\infty} B_{mn}^x (k_z^{mn})\, e^{i(k_x^m x + k_y^n y + k_z^{mn} z)} \tag{8}$$

и два аналогичных выражения для $E_y(P)$ и $E_z(P)$. Здесь

$$k_x^m = k_x^0 + mq_1; \quad k_y^n = nq_2; \quad k_z^{mn} = \sqrt{k^2 - (k_x^m)^2 - (k_y^n)^2}; \tag{9}$$

B_{mn}^x определяется из разложения в ряд Фурье следующего выражения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma}\Big\{ V_2 \Big[-\frac{k}{k_z} p_x \mathscr{H}_s^0 + \frac{k_x}{k_z} \mathscr{E}_n^0 - \Big(s_z \frac{k_y}{k_z} - s_y\Big) \mathscr{E}_p^0 \Big] + \\ + V_1 \Big[\frac{k}{k_z} s_x \mathscr{H}_p^0 - \Big(p_y - p_z \frac{k_y}{k_z}\Big) \mathscr{E}_s^0 \Big] \Big\} e^{i(k_z^0 - k_z) Z} = \\ = \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} B_{mn}^x (k_z)\, e^{i(mq_1 X + nq_2 Y)}; \end{aligned} \tag{10}$$

$\mathscr{E}_n^0$, $\mathscr{E}_s^0$, $\mathscr{E}_p^0$ и $\mathscr{H}_s^0$, $\mathscr{H}_p^0$ представляют амплитудные значения компонент электрического и магнитного векторов падающей волны в направлениях **n**, **s**, **p**; $q_1 = \frac{2\pi}{L_x}$; $q_2 = \frac{2\pi}{L_y}$; амплитуда (mn)-го спектра электрического поля равна:

$$E_{mn} = {}^1/_2 \sqrt{|B_{mn}^x|^2 + |B_{mn}^y|^2 + |B_{mn}^z|^2}. \tag{11}$$

Итак, задача о рассеянии электромагнитных волн свелась к нахождению коэффициентов Фурье разложения (10) и ему аналогичных для E_y, E_z, которые и учитывают форму неровной поверхности.

Проведем вычисления коэффициентов B_{mn} сначала для случая синусоидальной поверхности. Для простоты рассмотрения возьмем поверхность, волнистую только в одном направлении (например, в направлении оси x). Тогда уравнение поверхности может быть записано в виде $Z = a\cos qX$, где a — амплитуда волнистости, а $q = 2\pi / L$. В этом случае $\beta \equiv \cos(\widehat{\mathbf{nj}}) = 0$. При этом из (4) следует, что вектор $\mathbf{s}$ совпадает с положительным направлением оси y, а $\mathbf{p} = -\gamma\mathbf{i} + \alpha\mathbf{k}$. Соотношение (10) будет иметь вид:

$$V_2\left[\frac{k}{k_z}\frac{k_x k_x^0}{k\,k_z} - \frac{k_z^0}{k} + \left(\frac{k_x^0}{k} + \frac{k_x k_z^0}{k\,k_z}\right)\frac{\partial Z}{\partial X}\right] e^{i(k_z^0 - k_z)Z} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m^x(k_z)\, e^{imqX}; \qquad (12)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Для определения $B_m^x(k_z)$ имеем, очевидно, такую формулу:

$$B_m^x(k_z) = \frac{1}{L}\int_0^L F(x)\, e^{i(k_z^0 - k_z)Z - imqX}\, dX, \qquad (13)$$

где

$$F(x) \equiv V_2\left[\frac{k}{k_z} - \frac{k_x k_x^0}{k k_z} - \frac{k_z^0}{k} + \left(\frac{k_z^0}{k} - \frac{k_x k_z^0}{k k_z}\right)\frac{\partial Z}{\partial X}\right], \qquad (14)$$

L — период волнистости.

Перепишем (13) в следующей форме:

$$B_m^x(k_z) = \frac{1}{L}\int_0^L F(x)\, e^{mf(x)}\, dX, \text{ где } f(X) \equiv i\frac{a(k_z^0 - k_z)}{m}\cos qX - iqX. \qquad (15)$$

Для нахождения амплитуд спектров больших номеров m $(m \gg 1)$ можно провести асимптотическое вычисление интеграла (15) методом перевала ([3]). В результате вычислений для B_m^x имеем *

$$B_m^x(k_z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi m \operatorname{th}\alpha}}\, e^{m\left(\operatorname{th}\alpha - \alpha - i\frac{\pi}{2}\right)}\left[F(\tau_0) + \frac{F''(\tau_0)}{2m\operatorname{th}\alpha}\right], \qquad (16)$$

где $\tau \equiv qX$; τ_0 определяется из уравнения:

$$\sin\tau_0 = \operatorname{ch}\alpha; \quad \operatorname{ch}\alpha \equiv \frac{m}{-a(k_z^0 - k_z)}; \quad (k_z^0 - k_z) < 0. \qquad (17)$$

Для первых номеров m вычисление коэффициентов разложения (12) может быть проведено приближенно путем разложения в ряд Фурье отдельно функции $F(x)$ и экспоненциального множителя и перемножения соответствующих рядов.

Рассмотрим второй случай, когда неровная поверхность имеет трохоидальный профиль. Пусть уравнение поверхности задано в параметрической форме:

* Так как $F(\tau)$ имеет полюс, то при замене первоначального пути интегрирования перевальным необходимо учесть вычет функции $F(\tau)$. Однако можно показать расчетом, что при $|\varepsilon| \gg 1$ и достаточно больших углах скольжения падающей волны вычет будет значительно меньше интеграла, взятого по перевальному пути.

$$X = rt - l\sin t, \qquad \text{при } \frac{l}{r} < 1 - \text{укороченная трохоида.} \qquad (18)$$
$$Z = -r + l\cos t,$$

Очевидно, что и в этом случае имеет место формула (13). Переходя в (13) к интегрированию по параметру t при помощи уравнений (18) и применяя снова метод перевала для вычисления $B_m^x(k_z)$, окончательно имеем:

$$B_m^x(k_z) = iA\sqrt{\frac{1}{2\pi m f''(\varphi_0)}}\, e^{mf(\varphi_0)}\left[\Phi(\varphi_0) - \frac{\Phi''(\varphi_0)}{2mf''(\varphi_0)}\right], \qquad (19)$$

где $A \equiv e^{-i(k_z^0 - k_z)r - im\pi}$; $\Phi(\varphi) \equiv F[X(t)]\left(1 - \frac{l}{r}\cos t\right)$ при $t = \pi - \varphi$;

$f(\varphi) \equiv -i\frac{l(k_z^0 - k_z)}{m}\cos\varphi + iql\sin\varphi + i\varphi$; φ_0 определяется из уравнения $\frac{df}{d\varphi} = 0$.

Совершенно так же вычисляются $B_m^y(k_z)$ и $B_m^z(k_z)$.

Выражения в квадратных скобках (16) и (19) представляют ряды по обратным степеням m. При $m \gg 1$ уже второй член ряда достаточно мал по сравнению с первым и может не учитываться. Результаты вычисления рассеянного поля для рассмотренных выше двух неровных поверхностей показывают, что поверхность трохоидального вида дает значительно большее рассеяние в обратном направлении, чем синусоидальная поверхность той же амплитуды и длины волны, причем разница тем значительнее, чем больше номер спектра m. Изучение рассеяния волн на поверхностях различной формы представляет интерес. Оно позволит решить вопрос о том, какие характеристики неровной поверхности (длина, высота, крутизна волн и т. д.) являются определяющими рассеяние в определенных направлениях.

Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность Л. М. Бреховских за ценные советы.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
3 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Бреховских, ДАН, 81, № 6, 1023 (1951). [2] Д. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, 1948, стр. 410. [3] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, 1951, стр. 442.