

Л. М. БРЕХОВСКИХ

**ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА
В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ**

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 20 X 1952)

Рассмотрим звуковое поле в слоисто-неоднородной среде, где скорость звука зависит от координаты z следующим образом:

$$c = c_0 \text{ при } 0 \leq z \leq h; \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2a(z-h)}} \text{ при } h \leq z < \infty \quad (1)$$

и остается неизменной в плоскостях, перпендикулярных z . Зависимость плотности среды от z мы не уточняем, предполагая, что она всюду непрерывна и мало меняется на длине волны. При этом условии задача определения звукового поля сводится к решению волнового уравнения $\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2(z)} p = 0$, куда плотность не входит*.

Границу $z = 0$ будем предполагать полностью отражающей, полагая коэффициент отражения плоских волн от нее равным -1 , что соответствует, например, случаю, когда полупространство $z > 0$ является водой, а $z < 0$ воздухом.

Пусть излучение звука осуществляется ненаправленным точечным источником, на местоположение которого мы не будем накладывать никаких ограничений.

Частный случай $h = 0$ был рассмотрен Пекерисом⁽²⁾. Им было изучено диффракционное поле в области звуковой геометрической тени. Рассматриваемый нами случай $h \neq 0$ представляет интерес, например, при исследовании распространения звука в море, так как вблизи поверхности воды обычно имеется более или менее однородный слой, получающийся частично вследствие перемешивания верхних слоев воды, частично вследствие ее охлаждения при испарении. Заметим, что в этом случае ось z предполагается направленной сверху вниз. Этот случай рассматривал также Морзе⁽³⁾. Пользуясь методами лучевой акустики, он пришел к выводу, что существование даже тонких однородных слоев ведет к кардинальному изменению закона спадания силы звука с расстоянием. Ниже мы дадим точный волновой расчет распространения звука в этих условиях и покажем, что количественные результаты Морзе являются ошибочными вследствие незаконности применения метода лучевой акустики в случае тонких слоев.

Общая теория распространения волн в слоисто-неоднородных средах была дана в работе автора⁽⁴⁾. Там было показано, что перенос звуковой энергии от излучателя в точку приема осуществляется при помощи совокупности нормальных волн, распространяющихся в основном по

* Это нетрудно показать, пользуясь общей теорией, изложенной, например, в (1).

слою, и боковой волны, распространяющейся в основном вне слоя. Последней в нашем случае можно пренебречь ввиду наличия вне слоя «отрицательной рефракции», возникающей из-за уменьшения скорости звука с глубиной.

В данной заметке мы будем интересоваться лишь затуханием звукового поля с расстоянием. Применяя результаты работы (4) (стр. 526) к нашему случаю, мы находим, что амплитуда каждой из нормальных волн будет убывать с расстоянием r по закону $e^{1/2 k r \operatorname{Im} \alpha_l^2}$ *, где $\operatorname{Im} \alpha_l^2$ означает мнимую часть α_l^2 , а α_l ($l = 1, 2, \dots$) — корни трансцендентного уравнения

$$1 + V(\alpha) e^{2ik_0 h \sin \alpha} = 0, \quad (2)$$

лежащие в области $\operatorname{Im} \alpha_l < 0$, $0 \leq \operatorname{Re} \alpha_l \leq \pi/2$ (при этом $\operatorname{Im} \alpha_l^2 < 0$). Здесь $V(\alpha)$ — коэффициент отражения плоской волны от границы $z = h$ как функция угла скольжения α ; $k = \omega/c_0$ — волновое число в однородном слое. При этом для нас существенны лишь корни, удовлетворяющие условию $|\alpha_l| \ll 1$.

Определение $V(\alpha)$ производится обычным образом. Пусть из однородного слоя на границу $z = h$ падает плоская волна, в которой звуковое давление выражается формулой $Ae^{ik_0(x \cos \alpha + z \sin \alpha)}$; фактор $e^{-i\omega t}$, как всегда, опускаем. Отраженная волна запишется в виде $AVe^{ik_0(x \cos \alpha - z \sin \alpha)}$. В неоднородной среде при $z > h$ мы должны найти решение волнового уравнения $\Delta p + k^2(z) p = 0$ или $\Delta p + k_0^2[1 + 2a(z - h)] p = 0$. Будем искать его в виде $p = \varphi(z) e^{ik_0 x \cos \alpha}$, где $\varphi(z)$ — новая неизвестная функция. Введя вместо z новую переменную $\zeta = \sin^2 \alpha + 2a(z - h)$, для функции $\varphi(\zeta)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{k_0}{2a}\right)^2 \zeta \varphi = 0.$$

Его общее решение можно записать в виде (см., например, (5))

$$\varphi = w^{1/2} [CH_{1/2}^{(1)}(w) + DH_{1/2}^{(2)}(w)],$$

где $H_{1/2}^{(1)}(w)$ и $H_{1/2}^{(2)}(w)$ — функции Ханкеля порядка $1/2$ первого и второго рода; C и D — произвольные постоянные, а $w = \frac{k_0}{3a} \zeta^{3/2}$.

При $z \rightarrow \infty$ первое слагаемое в последней формуле имеет характер уходящей от границы $z = h$ волны, а второе слагаемое — приходящей волны. Поэтому, исходя из физического смысла задачи, нужно положить $D = 0$. Из условий непрерывности звукового давления и нормальной компоненты скорости (т. е. непрерывности p и $\partial p / \partial z$) на границе $z = h$ получаем два уравнения для определения V и C . Из них находим

$$V(\alpha) = \frac{H_{1/2}^{(1)}(w_0) - H_{1/2}^{(1)}(w_0) e^{-i\pi/3}}{H_{1/2}^{(1)}(w_0) + H_{1/2}^{(1)}(w_0) e^{i\pi/3}}, \quad w_0 \equiv \frac{k_0}{3a} \sin^3 \alpha. \quad (3)$$

С учетом (3) уравнение (2) может быть записано в виде

$$\operatorname{tg}(k_0 h \sin \alpha) = e^{-2\pi i/3} \frac{H_{1/2}^{(1)}(w_0)}{H_{1/2}^{(1)}(w_0)}. \quad (4)$$

* В (4) предполагалось, что как излучатель, так и приемник расположены в однородном слое. Однако тип нормальных волн и их затухание не зависят от положения излучателя и приемника.

Решение этого уравнения показывает, что влияние однородного слоя на затухание силы звука с расстоянием характеризуется параметром

$$s = 1,64 \frac{h}{c_0} (bf^2)^{1/4}, \quad (5)$$

где $b \equiv ac_0$, f — частота в герцах. При $s \ll 1$ слой никак не сказывается на затухании звука. Коэффициент затухания на расстояниях, где при $h = 0$ наблюдается звуковая тень, оказывается таким же, как и у Пекериса⁽²⁾. Наоборот, при $s \gg 1$ влияние однородного слоя оказывается решающим.

Заметим, что в⁽²⁾ и⁽³⁾ закон изменения $c(z)$ несколько отличался от задаваемого нами и имел вид $c(z) = c_0(1 - az)$. Однако, ввиду того, что в процессе распространения играют роль лишь значения z , при которых $az \ll 1$, последнее уравнение практически совпадает с нашим вторым уравнением в (1). Этим и объясняется тождество наших результатов при $h = 0$ с результатами, найденными в⁽²⁾.

Для количественной оценки роли однородного слоя рассмотрим в качестве примера следующий случай: $b = 0,2 \text{ сек}^{-1}$, $f = 24\,000 \text{ гц}$. При $h = 0$ имеем для коэффициента затухания звука на достаточно большом расстоянии $\delta = 171 \text{ дб/км}$, что можно было бы получить и на основании формул, полученных в⁽²⁾. При $h = 0,5 \text{ м}$ имеем $s = 0,26$, $\delta = 167 \text{ дб/км}$. Таким образом, слой такой толщины на затухании почти не сказывается. Между тем, если бы мы стали подсчитывать силу звука методами лучевой акустики (из закона расширения лучевых трубок), то для этого случая получили бы уменьшение затухания во много раз. Так, у Морзе⁽³⁾ для аналогичного случая затухание оказалось равным 44 дб/км^* . Возьмем теперь $h = 3 \text{ м}$, что соответствует $s = 1,59$. При этом получаем $\delta = 19 \text{ дб/км}$. Таким образом, в этом случае наличие однородного слоя весьма существенно сказалось на уменьшении затухания.

Ввиду того, что лучевая акустика в ряде случаев все же может являться удобным приемом для вычисления силы звука, определим границы ее применимости в рассматриваемом нами случае. Как известно, волновая теория эквивалентна лучевой теории в тех случаях, когда играет роль достаточно большое число нормальных волн. Если мы ограничимся случаем излучателя и приемника, расположенных в однородном слое, когда амплитуды возбуждения ряда первых нормальных волн почти одинаковы, то это будет иметь место на таких достаточно малых расстояниях, когда затуханием первой нормальной волны можно пренебречь, т. е. $r\delta \ll 1$.

Согласно⁽⁴⁾ (стр. 526 и др.), для δ в случае первой нормальной волны имеем $\delta = \frac{\pi}{h} \Delta$, где $\Delta = \frac{\pi}{(k_0 h)^2} p'$. В свою очередь p' найдется, если $V(\alpha)$ при малых α представить в виде $V(\alpha) = -e^{-2p\alpha}$. При этом p' будет вещественной частью p .

Воспользовавшись выражением функций $H_{1/2}^{(1)}$ и $H_{1/2}^{(2)}$ через функции Бесселя и разложением последних по степеням аргумента, находим при $s \gg 1$ $p' = \left(\frac{k_0}{6a}\right)^{1/4}$. В результате, условие $r\delta \ll 1$ дает

$$r \ll \frac{h^2}{\lambda} s. \quad (6)$$

* В⁽³⁾ рассматривался случай, когда градиент скорости звука при приближении к поверхности воды плавно стремился к нулю. Поэтому для получения того же значения скорости звука на поверхности, которое в нашем случае будет при $h = 0,5 \text{ м}$, в этой работе надо взять толщину слоя (в обозначениях Морзе) $l = 0,9 \text{ см}$.

Заметим, что требование малости зоны Френеля по сравнению с толщиной слоя дало бы условие $r \ll h^2/\lambda$, которое, в силу $s \gg 1$, является более жестким, чем условие (6).

Поступило
20 VIII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, 1944, стр. 245.
² С. L. Pekeris, *J. Ac. Soc. Am.*, **18**, 295 (1946). ³ R. W. Morse, *ibid.*, **22**, 857 (1950). ⁴ Л. М. Бреховских, *Изв. АН СССР, сер. физ.*, **8**, 505 (1949). ⁵ Я. Л. Альперт, *Распространение радиоволн в ионосфере*, § 6, 1947.